12. Die Fourier-Transformation

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist die bekannte Fourier-Entwicklung einer T–periodischen, stückweise stetigen bzw. stückweise stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nach Ansorge, Oberle, Abschnitt 16, hat man die folgenden Darstellungen

$T = 2\pi\ell$

A. Komplexe Darstellung (12.1)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, \mathrm{e}^{i\,k\,\omega\,t}, \qquad \omega = \frac{2\,\pi}{T},$$

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\, \mathrm{e}^{-i\,k\,\omega\,\tau}\, d\tau$$

B. Reelle Darstellung (12.2)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\,\omega\,t) + b_k \sin(k\,\omega\,t)\right]$$

$$a_k = 2\,\mathrm{Re}\,\gamma_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\, \cos(k\,\omega\,\tau)\, d\tau$$

$$b_k = -2\,\mathrm{Im}\,\gamma_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\, \sin(k\,\omega\,\tau)\, d\tau$$

• Unter den entsprechenden Voraussetzungen konvergieren die jeweiligen Reihen – mit denen aus f berechneten Fourier-Koeffizienten – punktweise und in kompakten Intervallen, in denen f stetig ist, auch gleichmäßig gegen f.
In Unstetigkeitsstellen von f konvergieren die Reihen gegen den Mittelwert $(f(t^-) + f(t^+))/2$.

Die **Grundidee der Fourier-Transformation** besteht nun darin, die obigen Darstellungen durch Grenzwertbildung $T \to \infty$ auf nichtperiodische Funktionen zu übertragen.

Setzt man die Fourier-Koeffizienten in (12.1) ein, so erhält man

$$f(t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\,\omega_k\,t} \left(\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\,\omega_k\,\tau}\,d\tau}_{F_k} \right) \Delta\omega, \qquad (12.3)$$

$$\xrightarrow{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\tau \,.$$

wobei $\Delta\omega := \omega := 2\pi/T$ und $\omega_k := k\,\Delta\omega,\ k \in \mathbb{Z}$.

(12.3) lässt sich als Riemann-Summe der Funktion $\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}\,F_T(\omega)$ mit $F_T(\omega) := \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,\tau}\,d\tau$ zur Zerlegung $\{\omega_k :\ k \in \mathbb{Z}\}$ interpretieren (t fest).

Für $T \to \infty$ erhalten wir formal (d.h. ohne Konvergenzaussage) die folgende Darstellung

$$F(\omega) = \lim_{T\to\infty} F_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

$$\textbf{(a)} \qquad f(t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}\,d\omega$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (12.4)$$
$$\textbf{(b)} \qquad F(\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\mathrm{e}^{-\,i\,\omega\,\tau}\,d\tau$$

- Die in (12.4) b) definierte Funktion $F(\omega),\ \omega \in \mathbb{R}$ heißt (sofern existent) die Fourier-Transformierte oder Spektralfunktion von f. Sie lässt sich interpretieren als Dichtefunktion der in f enthaltenen harmonischen Schwingungen. (12.4) a) heißt Fourier-Integral oder spektrale Zerlegung von f. Beide uneigentlichen Integrale sind im Sinn des Cauchyschen Hauptwertes zu berechnen.

- Andere Schreibweisen: $\mathcal{F}[f](\omega) = \widehat{f}(\omega) = F(\omega)$, dabei bezeichnet $\mathcal{F}$ den *Operator der Fourier-Transformation*.

Reelle Darstellung. Durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil erhalten wir aus (12.4)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ (\cos(\omega\,\tau) - i\,\sin(\omega\,\tau))\ d\tau =: a(\omega) - i\,b(\omega)$$

sowie

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\ (\cos(\omega\,\tau) + i\,\sin(\omega\,\tau))\ d\omega \\ &= \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (a(\omega) - i\,b(\omega))\ (\cos(\omega\,\tau) + i\,\sin(\omega\,\tau))\ d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} (a(\omega)\ \cos(\omega\,\tau) + b(\omega)\ \sin(\omega\,\tau))\ d\omega \end{aligned}$$

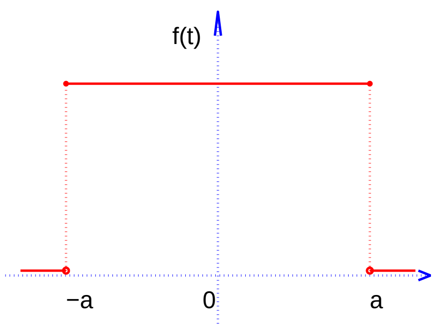
Zur letzten Umformung beachte man, dass $a(\omega)$ eine gerade und $b(\omega)$ eine ungerade Funktion ist.

Zusammengefasst ergibt sich das Sinus-, Cosinus Spektrum:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} (a(\omega)\ \cos(\omega\,\tau) + b(\omega)\ \sin(\omega\,\tau))\ d\omega \\ a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ \cos(\omega\,\tau)\,d\tau \\ b(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ \sin(\omega\,\tau)\,d\tau \end{aligned} \qquad (12.5)$$

Beispiel (12.6) Rechteckimpuls

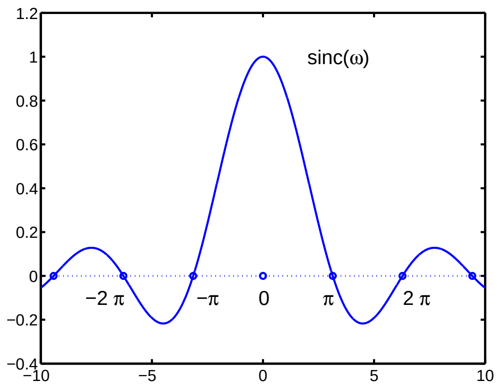
$$f(t) = \begin{cases} 1 & : \ -a \le t \le a, \\ 0 & : \ |t| > a. \end{cases}$$



$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int\limits_{\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt \;=\; \int\limits_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt \\
&= -\frac{1}{i\omega}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\Big|_{-a}^{a} \;=\; -\frac{1}{i\omega}\left[\mathrm{e}^{-i\omega a} - \mathrm{e}^{i\omega a}\right] \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{\omega}\sin(\omega\, a) & : \text{ für } \omega \neq 0, \\ 2\,a & : \text{ für } \omega = 0 \end{cases} \\
&= 2\,a\,\operatorname{sinc}(\omega a).
\end{aligned}
$$

Dabei wird die **sinc-Funktion** definiert durch

$$
\operatorname{sinc}(z) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{1}{z}\sin(z) & : \text{ für } z \neq 0, \\ 1 & : \text{ für } z = 0. \end{cases} \tag{12.7}
$$



Umkehrung:

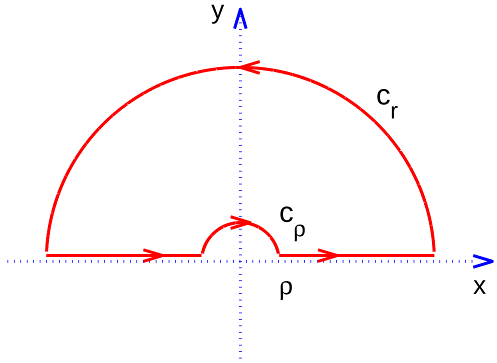
$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,\sin(\omega\, a)}{\omega}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega\, a)\,\cos(\omega\, t)}{\omega}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega\,(a+t)) + \sin(\omega\,(a-t))}{\omega}\,d\omega.
\end{aligned}
$$

CHW $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx = 0$, aber $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$ divergent, siehe Tafel

Ableitung: CHW $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$, d.h. untere Grenze = - obere Grenze

Es sind somit zwei Integrale vom Typ CHW $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx$ zu berechnen. Hierzu lässt wieder der Residuensatz verwenden; vgl. Abschnitt 11. Wir integrieren - analog zu (11.9) - über den folgenden stkw. C^1-Weg.

$$\text{CHW} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx \qquad (\alpha > 0)$$



Mit einer analogen Abschätzung wie in (11.5) finden wir

$$\int_{C_r} \frac{e^{i\alpha z}}{z}\,dz \;\longrightarrow\; 0 \qquad (r \to \infty)$$

Ferner folgt mittels Laurent-Entwicklung $e^{i\alpha z}/z = 1/z + h(z)$, wobei h holomorph auf $\mathbb{C}$ ist. Somit folgt

$$\int_{C_\rho} \frac{e^{i\alpha z}}{z}\,dz \;=\; \int_{C_\rho} \frac{1}{z}\,dz + \int_{C_\rho} h(z)\,dz,$$

mit $\int_{C_\rho} h(z)dz \to 0$ für $\rho \downarrow 0$ und

$$\int_{C_\rho} \frac{1}{z}\,dz \;=\; -\int_0^{\pi} \frac{1}{\rho}\, e^{-i\phi} \rho i e^{i\phi}\,d\phi \;=\; -\pi\, i.$$

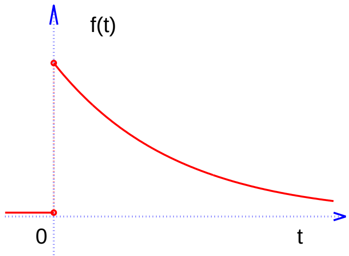
Insgesamt ist also $\int_{C_\rho} \frac{e^{i\alpha z}}{z}\,dz \;=\; -\pi\, i$, und damit

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = \begin{cases} \pi, & \text{für } \alpha > 0, \\ 0, & \text{für } \alpha = 0, \\ -\pi, & \text{für } \alpha < 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{F}^{-1}[F](t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t| < a, \\ 1/2, & \text{für } |t| = a, \\ 0, & \text{für } |t| > a. \end{cases}$$

Beispiel (12.8) Kondensator Entladung

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-a\,t} & : \ t \geq 0, \\ 0 & : \ t < 0. \end{cases}$$



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+i\,\omega)\,t}\, dt$$
$$= -\frac{1}{a+i\,\omega}\, \mathrm{e}^{-(a+i\,\omega)\,t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\,\omega} \qquad (a > 0).$$

Umkehrung:

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a+i\,\omega}\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{it\omega}}{\omega - ia}\, d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x - i\,a\,t}\, dx, \quad = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z-iat}, iat\right)$$

wobei $x := t\,\omega$, $dx = t\,d\omega$.
Für $t \neq 0$ lässt sich das Integral mit Satz (11.5) berechnen.

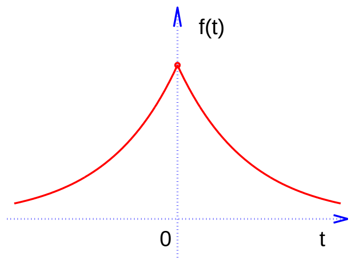
Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[F](t) &= \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z - i\,a\,t};\; z_k\right) \\ &= \begin{cases} e^{-i\,a\,t}, & \text{für } t > 0, \\ 0, & \text{für } t < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Für $t = 0$ ergibt sich durch direkte Berechnung des (ersten) Integrals $\mathcal{F}^{-1}[F](0) = 1/2$ (Mittelwerteigenschaft).

Beispiel (12.9)

$f(t) = e^{-a\,|t|}, \quad a > 0.$



$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\,|t|}\, e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(a - i\,\omega)\,t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{(a + i\,\omega)\,t}\, dt \\ &= \frac{1}{a - i\,\omega} + \frac{1}{a + i\,\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

Satz (12.10) (Existenz, Eindeutigkeit)

a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stkw. stetig und absolut integrabel, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$, so existiert die Fourier-Transformierte

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\,t}\, dt$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$. Das Integral konvergiert gleichmäßig und $F = \mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

denn $|F(\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, \underbrace{|e^{-i\omega t}|}_{=1}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty!$

b) Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stkw. C^1-Funktion und absolut integrabel, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die folgende Umkehrformel

$$\frac{1}{2}\Big(f(t^-) + f(t^+)\Big) = \text{CHW}\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\,\omega\,t}\, d\omega.$$

c) Sind $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stkw. C^1-Funktionen und absolut integrabel und besitzen diese die gleiche Fourier-Transformierte, also $F_1(\omega) = F_2(\omega)$, $(\forall\, \omega \in \mathbb{R})$, so folgt $f_1(t) = f_2(t)$ in allen Punkten $t \in \mathbb{R}$, in denen f_1 und f_2 stetig sind.

Es sei angemerkt, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stkw. stetig, bzw. eine stkw. C^1-Funktion genannt wird, wenn sie dies auf jedem kompakten Teilintervall von $\mathbb{R}$ ist.

Rechenregeln.

Im Folgenden sein $f, g, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stkw. stetig differenzierbar und absolut integrabel. Mit $F(\omega), G(\omega), \ldots$ werden ihre Fourier-Transformierten bezeichnet.

(1) Linearität.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f+g](\omega) &= F(\omega) + G(\omega) \\ \mathcal{F}[\alpha\, f](\omega) &= \alpha\, F(\omega) \end{aligned} \tag{12.11}$$

(2) Konjugation.

$$\mathcal{F}[\overline{f}](\omega) = \overline{F(-\,\omega)} \tag{12.12}$$

Denn: $\mathcal{F}[\overline{f}](\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)\, e^{-i(-\omega)t}}\, dt.$

(3) Streckung.

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|}\, F(\omega/c) \tag{12.13}$$

Denn: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(ct)e^{-i\omega t}\,dt = \text{sign}(c) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau/c}\,\frac{1}{c}\,d\tau.$

(4) Verschiebungssätze.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t-a)](\omega) &= e^{-i\omega a}\,F(\omega) \\ \mathcal{F}[e^{i\,a\,t}\,f(t)](\omega) &= F(\omega-a) \end{aligned} \qquad (12.14)$$

Denn: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,e^{-i\omega(\tau+a)}\,d\tau,$ sowie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}\,f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i(\omega-a)t}\,dt.$$

(5) Faltungssätze.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(f*g)(t)](\omega) &= F(\omega)\,G(\omega), \\ \mathcal{F}[f(t)\,g(t)](\omega) &= \tfrac{1}{2\pi}\,(F*G)(\omega). \end{aligned} \qquad (12.15)$$

Dabei bezeichnet $(f*g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$ die Faltung der Funktionen f und g.

Denn: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\, e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\,e^{-i\omega\,(t-\tau)}\,dt\,g(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$

Beispiel (12.16)

Für die Faltung $g = f*f$ des Rechteckimplulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : \ -1 \le t \le 1, \\ 0 & : \ |t| > 1. \end{cases}$$

erhält man nach leichter Rechnung die „Dachfunktion"

$$g(t) = \int_{\max\{-1,t-1\}}^{\min\{1,t+1\}} 1\,d\tau = \begin{cases} 2-|t| & : \ -2 \le t \le 2, \\ 0 & : \ |t| > 2. \end{cases}$$

Hut Funktion!

Mit (12.6) und dem Faltungssatz ergibt sich damit für die Fourier-Transformierte von g: $G(\omega) = 4\,\mathrm{sinc}^2(\omega)$.

(6) Differentiation.

Ist f eine stückweise C^1-Funktion mit nur *endlich* vielen Unstetigkeitsstellen $t_1, \ldots, t_m$ und sind f und f' absolut integrierbar, so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) \;=\; i\,\omega\, F(\omega) \;-\; \sum_{k=1}^{m} \Big(f(t_k^+) - f(t_k^-) \Big)\, \mathrm{e}^{-i\omega t_k} \qquad (12.17)$$

Beweis: (o.E.d.A. für eine Unstetigkeitsstelle)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt &= \int_{-\infty}^{t_1} f'(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt + \int_{t_1}^{\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt \\ &= \left[f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\right]\Big|_{-\infty}^{t_1} + \left[f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\right]\Big|_{t_1}^{\infty} + i\,\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt \\ &= \Big(f(t_1^-) - f(t_1^+)\Big)\,\mathrm{e}^{-i\omega t_1} + i\,\omega\, F(\omega) \qquad \square \end{aligned}$$

Ist f sogar stetig, so folgt $\mathcal{F}[f'](\omega) \;=\; i\,\omega\, F(\omega)$.
Entsprechend erhält man für die höheren Ableitungen unter Stetigkeitsvoraussetzungen

$$\mathcal{F}[f^{(s)}](\omega) \;=\; (i\,\omega)^s\, F(\omega), \qquad s \in \mathbb{N}. \qquad (12.18)$$

Beispiel (12.19)

Wir suchen eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathcal{F}[y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t)] = \mathcal{F}[c(t)] \qquad \mathcal{F} \text{ additiv}$$

die den Wachstumsbedingungen $\lim\limits_{|t|\to\infty} y(t) = 0$ und $\lim\limits_{|t|\to\infty} y'(t) = 0$ genügt. Die Fourier-Transformation ergibt mit (12.18)

$$(-\omega^2 + i\,\omega\,a + b)\,Y(\omega) \;=\; C(\omega),$$

wobei Y die Fourier-Transformierte von y und C diejenige von c bezeichnet.

Damit ist also

$$F(\omega) \qquad C(\omega) \quad = \quad F[\underbrace{(f * c)(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, c(\tau)\, d\tau}](\omega)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$Y(\omega) \;=\; \frac{1}{-\omega^2 + i\,\omega\, a + b}\, C(\omega)$$

und die Rücktransformation liefert mittels Faltungssatz (12.15) die folgende Lösungsdarstellung

$$y(t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\,\omega\, a + b}\, \mathrm{e}^{i\omega(t-\tau)}\, d\tau\, d\omega$$

Beispiel (12.20) (RC - Tiefpass)

Bei vorgegebenem Spannungsverlauf $u_1(t)$ ist eine Lösung $u(t)$ der Differentialgleichung

$$R\,C\,\dot{u}(t) + u(t) \;=\; u_1(t)$$

gesucht (R: Ohmscher Widerstand, C: Kapazität).

Sind u_1 und u Fouier-transformierbar (mit Fourier-Transformierten U_1 und U), so folgt aus obiger Differentialgleichung

$$U(\omega) \;=\; \frac{U_1(\omega)}{1 + i\,\omega\, R\, C}\,.$$

Die *Übertragungsfunktion* $H(\omega) := 1/(1 + i\omega RC)$ ist nun nach Beispiel (12.8) die Fourier-Transformierte von

$$h(t) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{RC}\,\mathrm{e}^{-t/(RC)} & : \; t > 0, \\ 0 & : \; t < 0. \end{cases}$$

Damit ergibt sich nun aus dem Faltungssatz die Darstellung

$$u(t) \;=\; (h * u_1)(t) \;=\; \frac{1}{RC} \int_0^{\infty} u_1(\tau)\, \mathrm{e}^{-(t-\tau)/(RC)}\, d\tau\,.$$

Es sei angemerkt, dass dies die einzige Lösung der Differentialgleichung ist, die die Wachstumsbedingung $u(t) \to 0$, für $|t| \to \infty$, erfüllt.

Anwendungen.

Wir betrachten noch zwei Anwendungen der Fourier-Transformation auf partielle Differentialgleichungen.

Beispiel (12.21) (Wärmeleitung)

Wir untersuchen die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung für einen unendlich langen Stab.

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= c\, u_{x\,x}(t,x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Bilden wir die Fourier-Transformation bzgl. der Variablen x, also $U(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, \mathrm{e}^{-i\omega x}\, dx$, so folgt , also $U_t(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u_t(x,t)}_{c\, u_{xx}(x,t)} e^{-i\omega x} dx$

$$\begin{aligned} U_t(\omega,t) &= c\,(i\,\omega)^2\, U(\omega,t), \qquad U(\omega,0) = U_0(\omega), \\ \Rightarrow \quad U(\omega,t) &= U_0(\omega)\, \mathrm{e}^{-c\,\omega^2\, t}, \end{aligned}$$

$U_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\, e^{-i\omega x} dx$

Ziel: $u(t,x)$ = Darstellungsformel

$\overset{\text{Faltungssatz}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)\, u_0(\xi)\, d\xi\, e^{-i\omega x} dx$

$U(\omega,t) = U_0(\omega)\, e^{-c\omega^2 t} = U_0(\omega)\, \mathcal{F}[K(\cdot,t)(x)](\omega)$, d.h. $=$

$= \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\, e^{-i\omega x} dx$

$K(x,t) \overset{!}{=} \mathcal{F}^{-1}[e^{-c\omega^2 t}]$

$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)\, u_0(\xi)\, d\xi$

wobei U_0 die Fourier-Transformierte der Anfangsfunktion u_0 bezeichnet. Zur Rücktransformation verwenden wir wieder den Faltungssatz und bestimmen dazu zunächst das Urbild der Funktion $\mathrm{e}^{-ct\omega^2}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-ct\omega^2}] &= \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ct\omega^2}\, \mathrm{e}^{i\,\omega\,x}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-([\sqrt{ct}\omega]^2 - ix/\sqrt{ct}[\sqrt{ct}\omega] - \frac{x^2}{4ct})}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4ct}}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\,\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4ct}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-([\sqrt{ct}\omega] - \frac{ix}{2\sqrt{ct}})^2}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi c t}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4ct}}\,. \end{aligned}$$

Details im Buch von Bärwolff

Die Anwendung des Faltungssatzes ergibt nunmehr

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}} \, u_0(\xi)\, d\xi \tag{12.22}$$

Man beachte, dass die obige Herleitung nur formal ist, da wir die Existenz der Fourier-Transformationen nicht nachgewiesen haben. Der in (12.22) auftretende Faktor

$$G(x,\xi,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}}, \quad t > 0,$$

heißt wie früher *Greensche Funktion*.

Beispiel (12.23) (Potentialgleichung)

Wir betrachten das folgende Potentialproblem auf der Halbebene

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \geq 0, \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Die Fourier-Transformation bzgl. der Variablen x ergibt

$$U_{yy}(\omega,y) = -(i\omega)^2\, U(\omega,y) = \omega^2\, U(\omega,y)$$

und somit $U(\omega,y) = C_1 \mathrm{e}^{|\omega|y} + C_2 \mathrm{e}^{-|\omega|y}$.
Da wir nur Lösungen betrachten, die für $|y| \to \infty$ verschwinden, muss $C_1 = 0$ sein und somit

$$U(\omega,y) = U_0(\omega)\, \mathrm{e}^{-|\omega|\, y}.$$

Zur Rücktransformation liefert zunächst das Beispiel (12.9)

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-|\omega|y}] = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{y^2 + x^2}$$

und hiermit und dem Faltungssatz

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-\xi)^2}\, u_0(\xi)\, d\xi. \tag{12.24}$$

(12.24) heißt die Poissonsche Integralformel für die Halbebene.

Das Abtastproblem.

Von einer hinreichend glatten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien nur die Werte auf einem äquidistanten Gitter $t_k = k\,\Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$, bekannt. Wir fragen, ob sich hieraus die Funktion f auch zwischen den Knoten rekonstruieren lässt. Allgemein wird sich nur etwas aussagen lassen, wenn man voraussetzt, dass f zu einer bestimmten Funktionenklasse gehört.

Beispiel: Ist f etwa ein Polynom vom Höchstgrad n, so braucht man nur $n+1$ Stützstellen $(t_k, f_k)_{k=0,\dots,n}$ zu kennen, um hieraus f mittels Polynom-Interpolation rekonstruieren zu können.

Beispiel: Sei f eine T-periodische Funktion mit der Fourier-Entwicklung

$$f(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, \mathrm{e}^{ik\omega t}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Fordern wir, dass die Amplituden γ_k nur für endlich viele Frequenzen $\omega_k = k\omega$ nicht verschwinden, so ist f ein trigonometrisches Polynom $f(t) = \sum_{k=-m}^{m} \gamma_k \, \mathrm{e}^{ik\omega t}$. Die $(2m+1)$ Unbekannten γ_k, $k = -m, \dots, m$ lassen sich mittels *trigonometrischer Interpolation* aus den f_k–Werten bestimmen; vgl. Lehrbuch (16.3.11). Hierzu braucht man wenigstens die Knoten

$$t_k \;=\; k\,\Delta t,\;\; k = 0, 1, \dots, N-1, \qquad \Delta t \;=\; \frac{T}{N}, \qquad N = 2m+1.$$

Man fordert also weiterhin für die Abtastrate

$$\Delta t \;\le\; \frac{T}{N} \;=\; \frac{2\pi}{(2m+1)\,\omega} \;=:\; \frac{\pi}{\Omega},$$

wobei $\Omega := \frac{2m+1}{2}\,\omega \;\approx\; m\omega$ die *Bandbreite* bezeichnet.

Wir übertragen das letzte Beispiel nun auf den aperiodischen Fall.

Dazu lauten die entsprechenden Forderungen an eine (Fourier-transformierbare) Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die so genannten *Nyquist–Bedingungen*

I. f besitzt endliche Bandbreite, d.h. es gibt ein $\Omega > 0$ mit $F(\omega) = 0$ für alle $|\omega| > \Omega$.

II. Die Abtastfrequenz $2\pi/\Delta t$ ist mindestens doppelt so groß wie die Bandbreite, also $\Delta t \le \pi/\Omega$.

Satz (12.25) (Abtasttheorem von Shannon)

Unter den genannten Voraussetzungen lässt sich f aus den Daten $f(t_k),\ t_k := k\,\Delta t,\ k \in \mathbb{Z}$ rekonstruieren.

Beweis: (ohne Konvergenzuntersuchungen) Aufgrund der Voraussetzung I lässt sich f folgendermaßen schreiben

$$f(t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{12.26}$$

Wir setzen $F(\omega),\ \omega \in [-\Omega, \Omega]$, 2Ω–periodisch auf $\mathbb{R}$ fort und betrachten die zugehörige Fourier-Reihe

$$F(\omega) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\,\mathrm{e}^{i\,k\,(\pi/\Omega)\,\omega}, \qquad -\Omega \le \omega \le \Omega. \tag{12.27}$$

Für die Fourier-Koeffizienten gilt nun nach Lehrbuch (16.1.11) und (12.26)

$$\gamma_k \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega)\,\mathrm{e}^{i\,k\,(\pi/\Omega)\omega}\,d\omega \;=\; \frac{\pi}{\Omega}\,f(-t_k). \tag{12.28}$$

Dabei haben wir o.E.d.A. $\Delta t = \pi/\Omega$ angenommen (andernfalls würde man Ω entsprechend vergrößern).

Setzt man nun (12.27) in (12.26) ein, so lässt sich umformen

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, \mathrm{e}^{i\,(t+k\,(\pi/\Omega))\,\omega} \, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \int_{-\Omega}^{\Omega} \mathrm{e}^{i\,(t+k\,(\pi/\Omega))\,\omega} \, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, \frac{1}{i(t+k\,(\pi/\Omega))} \, \mathrm{e}^{i\,(t+k\,(\pi/\Omega))\,\omega} \Big|_{\omega=-\Omega}^{\Omega} \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, \frac{\sin(\Omega t + k\pi)}{(t+k\,(\pi/\Omega))} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) \, \frac{\sin(\Omega t - k\pi)}{(\Omega t - k\,\pi)},
\end{aligned}
$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus (12.28) ergibt. Damit ist f allein durch die Werte $f(t_k)$ dargestellt worden. $\square$