

## 5. Konforme Abbildungen

### Satz (5.1) (über konforme Abbildungen)

**a)** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  mit  $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$ , so gelten die folgenden lokalen Eigenschaften bei  $z_0 \in D$ :

- Der Winkel zwischen zwei sich in  $z_0$  schneidenden Kurven bleibt bei der Transformation  $w = f(z)$  erhalten. Ebenso der Umlaufsinn.
- $|f'(z_0)|$  ist die für alle von  $z_0$  ausgehenden Richtungen gemeinsame Längenverzerrung. Insbesondere bleiben Längenverhältnisse im Kleinen erhalten.

Abbildungen mit diesen beiden Eigenschaften heißen *konforme Abbildungen*.

69

**b)** Ist  $w = f(z)$  eine konforme Abbildung und als Transformation  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar, so ist  $f$  auch komplex differenzierbar und es gilt  $f'(z) \neq 0$ .

**Beweis:** (nur zu a)) Sind  $c$  und  $\tilde{c}$  zwei  $C^1$ -Kurven in  $D$  mit  $c(0) = \tilde{c}(0) = z_0$ , so gilt für den Winkel zwischen den Tangenten an  $c$  und  $\tilde{c}$

$$\gamma = \sphericalangle(\dot{c}(0), \dot{\tilde{c}}(0)) = \arg(\dot{c}(0)) - \arg(\dot{\tilde{c}}(0)).$$

Für die Bildkurven  $f \circ c$  und  $f \circ \tilde{c}$  gilt dann

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \sphericalangle(f'(z_0)\dot{c}(0), f'(z_0)\dot{\tilde{c}}(0)) \\ &= \arg(f'(z_0)\dot{c}(0)) - \arg(f'(z_0)\dot{\tilde{c}}(0)) \\ &= \arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{c}(0)) - \arg(f'(z_0)) - \arg(\dot{\tilde{c}}(0)) \\ &= \gamma, \end{aligned}$$

70

$$\left\| \frac{d}{dt} (f \circ c)(0) \right\| = \left| f'(z_0) \dot{c}(0) \right| = |f'(z_0)| \|\dot{c}(0)\| \quad \square$$

**Definition (5.2)** Es sei  $w = f(z)$  eine bijektive und konforme Transformation  $f : D \rightarrow W$  zweier Gebiete  $D$  und  $W$  in  $\mathbb{C}$ .

Zu einer vorgegebenen  $C^2$ -Funktion  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  setzen wir  $\Psi := \Phi \circ f^{-1}$ .  $\Psi$  heißt die **konforme Transformation** von  $\Phi$  mittels  $f$ .

**Anwendung:** Gesucht ist eine **Potentialfunktion**  $\Phi$  (Lösung von  $\Delta\Phi = 0$ ) auf einem **physikalischen Bereich**  $D$ . Kennt man nun eine konforme Transformation  $f$  des physikalischen Bereichs auf einen **Modellbereich**  $W$  und eine Potentialfunktion  $\Psi$  auf  $W$ , so ist durch  $\Phi := \Psi \circ f$  eine gesuchte Potentialfunktion gegeben.

71

$$\begin{array}{ccc} D & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} & W \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

$\Phi(z)$ : gesuchte Potentialfunktion,  $D$ : physikalischer Bereich,  $W$ : Modellbereich,  $\Psi(w)$ : bekannte Potentialfunktion

**Definition (5.3)** Zu einer  $C^1$ -Funktion  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

$$\text{grad } \Phi(z) := \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

der **komplexe Gradient** von  $\Phi$ .

72

**Satz (5.4)** Unter den obigen Voraussetzungen an  $\Phi$ ,  $\Psi$  und  $f$  und entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gelten

a)  $\text{grad } \Phi(z) = \text{grad } \Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}$

b)  $\Delta\Phi(z) = \Delta\Psi(f(z)) \cdot |f'(z)|^2$

**Beweis:** zu a): Aus  $\Phi(x, y) = \Psi(u(x, y), v(x, y))$  folgt

$$\Phi_x = \Psi_u u_x + \Psi_v v_x, \quad \Phi_y = \Psi_u u_y + \Psi_v v_y,$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{grad } \Phi &= (\Psi_u u_x + \Psi_v v_x) + i(\Psi_u u_y + \Psi_v v_y) \\ &= \Psi_u (u_x + iu_y) + \Psi_v (v_x + iv_y) \\ &= \Psi_u (u_x - iv_x) + i\Psi_v (u_x - iv_x) \\ &= \text{grad } \Psi(w) \cdot \overline{f'(z)}. \end{aligned}$$

73

zu b): Nochmalige Differentiation liefert

$$\Phi_{xx} = \Psi_{uu} u_x^2 + 2\Psi_{uv} u_x v_x + \Psi_{vv} v_x^2 + \Psi_u u_{xx} + \Psi_v v_{xx}$$

$$\Phi_{yy} = \Psi_{uu} u_y^2 + 2\Psi_{uv} u_y v_y + \Psi_{vv} v_y^2 + \Psi_u u_{yy} + \Psi_v v_{yy}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Psi_{uu} [u_x^2 + u_y^2] + 2\Psi_{uv} [u_x v_x + u_y v_y] + \Psi_{vv} [v_x^2 + v_y^2] \\ &\quad + \Psi_u \Delta u + \Psi_v \Delta v. \end{aligned}$$

Aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten nun  $u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = |f'(z)|^2$ ,  $u_x v_x + u_y v_y = 0$ , sowie  $\Delta u = \Delta v = 0$ .

Damit folgt aus der obigen Gleichung  $\Delta\Phi = \Delta\Psi |f'(z)|^2$ .  $\square$

74

## Anwendung I: RWA für die 2-dim. Laplace-Gleichung

Zu lösen sei das Dirichlet-Randwertproblem

$$\Delta u = 0, \quad z \in D, \quad u(z) = u_0(z), \quad z \in \partial D, \quad (5.5)$$

für ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$ .

Wir nehmen an, dass sich  $\bar{D}$  (einschließlich Rand) bijektiv und stetig auf  $\bar{K}_1(0)$  abbilden lässt vermöge einer Transformation  $f: \bar{D} \rightarrow \bar{K}_1(0)$ , die auf  $D$  selbst konform ist. Mit  $\Psi := u \circ f^{-1}$  geht das **physikalische Problem** dann über in das **Modellproblem**

$$\Delta \Psi(w) = 0, \quad |w| < 1, \quad \Psi(w) = \Psi_0(w), \quad |w| = 1. \quad (5.6)$$

Mit der Fourierschen Methode lässt sich die Lösung des Modellproblems explizit angeben (vgl. Vorlesung Diff.gln. II).

In komplexer Schreibweise (Polarkoordinaten) gilt

75

$$\Psi(r e^{i\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k r^{|k|} e^{i k \varphi}, \quad (5.7)$$

wobei die  $\gamma_k$  die (komplexen) Fourier-Koeffizienten der transformierten Randfunktion  $\Psi_0(e^{i\varphi}) := u_0(f^{-1}(e^{i\varphi}))$  sind.

Die Rücktransformation ergibt

$$u(z) = \Psi(f(z)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k |f(z)|^{|k|} e^{i k \arg(f(z))}. \quad (5.8)$$

## Anwendung II: Ebene Potentialströmung

Wir betrachten eine stationäre, wirbel- und quellenfreie, ebene Umströmung eines Zylinders (mit  $z$ -Achse als Symmetrieachse und Querschnitt  $K \subset \mathbb{C}$ ). Bezeichnet  $\mathbf{u}: \mathbb{R}^2 \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^2$  das Geschwindigkeitsfeld der Strömung, so gelten

76

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}(x, y) &= \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \\
\text{(b)} \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Wir können annehmen, dass  $D := \mathbb{R}^2 \setminus K$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet im  $\mathbb{R}^2$  ist. Dann folgt aus (5.9) die Existenz zweier Potentiale, nämlich

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad U : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nabla U &= -\mathbf{u}(x, y), \quad \text{Geschwindigkeitspotential,} \\
\text{(b)} \quad V : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nabla V &= (u_2, -u_1)^\top, \quad \text{Stromfunktion.}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Die **Stromlinien** sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems  $\dot{x} = u_1$ ,  $\dot{y} = u_2$ . Damit sind die Stromlinien gegeben durch

$$V(x, y) = \text{const.} \tag{5.11}$$

77

$$\text{Denn: } \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = V_x \dot{x} + V_y \dot{y} = u_2 u_1 - u_1 u_2 = 0.$$

Die Stromlinien sind also die Höhenlinien der Stromfunktion  $V$ .

**Definition (5.12)** Die komplexe Funktion  $\Phi := U + iV$  heißt das **komplexe Strömungspotential**.

$\Phi$  ist eine auf  $D$  holomorphe Funktion, da die Cauchy- Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind

$$U_x - V_y = -u_1 - (-u_1) = 0, \quad U_y + V_x = -u_2 + u_2 = 0.$$

Man kann das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  der Strömung auch folgendermaßen aus dem komplexen Strömungspotential zurück erhalten:

$$\mathbf{u} = u_1 + i u_2 = -\overline{\Phi'(z)}, \tag{5.13}$$

$$\text{denn: } \Phi'(z) = U_x + i V_x = -u_1 + i u_2.$$

78

**Idee zur Berechnung von  $\Phi$ :** Durch konforme Transformation werde  $D = \mathbb{C} \setminus K$  in ein einfacheres Gebiet transformiert, für das man das komplexe Strömungspotential kennt.

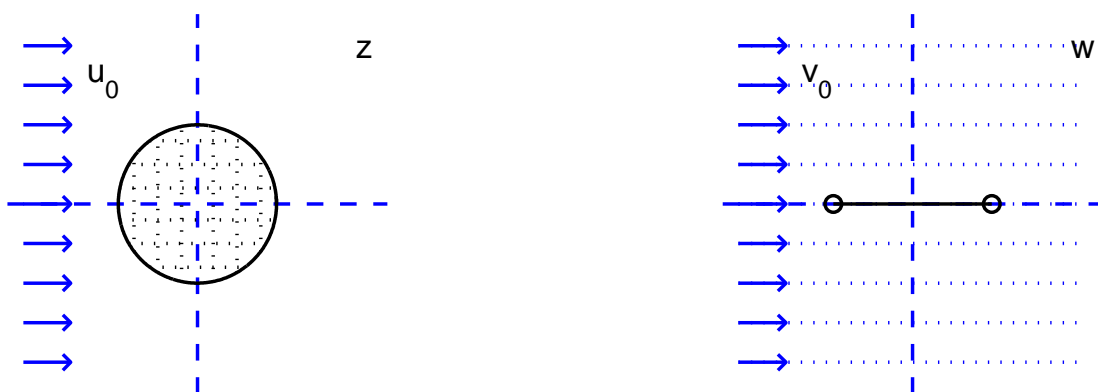
**Beispiel (5.14) Umströmung eines Kreiszyinders.**

Wir untersuchen die ebene Umströmung eines Kreiszyinders mit der Querschnittsfläche  $\overline{K}_R(0)$ ,  $R > 0$ . Das Geschwindigkeitsfeld im Unendlichen sei  $\mathbf{u}(\infty) = u_0 > 0$ . Als konforme Transformation wählen wir die Joukowski-Funktion, vgl. (2.8)

$$w = \xi + i\eta = f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right)$$

Hierdurch wird  $|z| = R$  auf die (doppelt durchlaufene) Strecke  $[-1, 1]$  abgebildet und das Gebiet  $D = \mathbb{C} \setminus \overline{K}_R(0)$  wird konform auf  $\widetilde{D} = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  transformiert. Die Strömung wird im Modellbereich also durch das Hindernis nicht beeinflusst!

79



Wegen (5.10) lautet das komplexe Strömungspotential im Bildraum  $\widetilde{\Phi}(w) = -v_0 w$ ,  $w \in \mathbb{C}$ , wobei  $v_0 > 0$  die (konstante) Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen ist. Die Rücktransformation ergibt das Strömungspotential des Ausgangsproblems

$$\Phi(z) = \widetilde{\Phi}(f(z)) = -\frac{v_0}{2} \left( \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right)$$

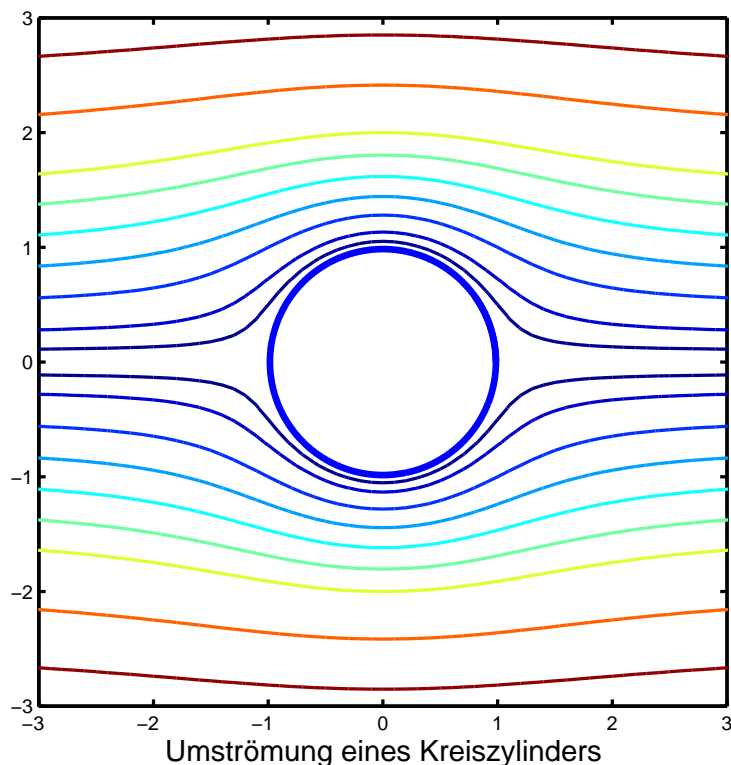
80

und somit nach (5.13)  $\mathbf{u}(z) = -\overline{\Phi'(z)} = \frac{v_0}{2} \left( \frac{1}{R} - \frac{R}{\bar{z}^2} \right)$ .

Zu Skalierung: Für  $z \rightarrow \infty$  ergibt sich  $\mathbf{u}(\infty) = v_0/(2R) = u_0$  und somit  $v_0 = 2Ru_0$ . Insgesamt erhalten wir also

- Kompl. Strömungspotential:  $\Phi(z) = -u_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right)$
- Geschwindigkeitspotential:  $U(z) = -u_0 \left( x + \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \right)$
- Stromfunktion:  $V(z) = -u_0 \left( y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right)$
- Geschwindigkeitsfeld:  $\mathbf{u}(z) = u_0 \left( 1 - \frac{R^2}{\bar{z}^2} \right)$

81



82

### Beispiel (5.15) Überströmung einer Mauer.

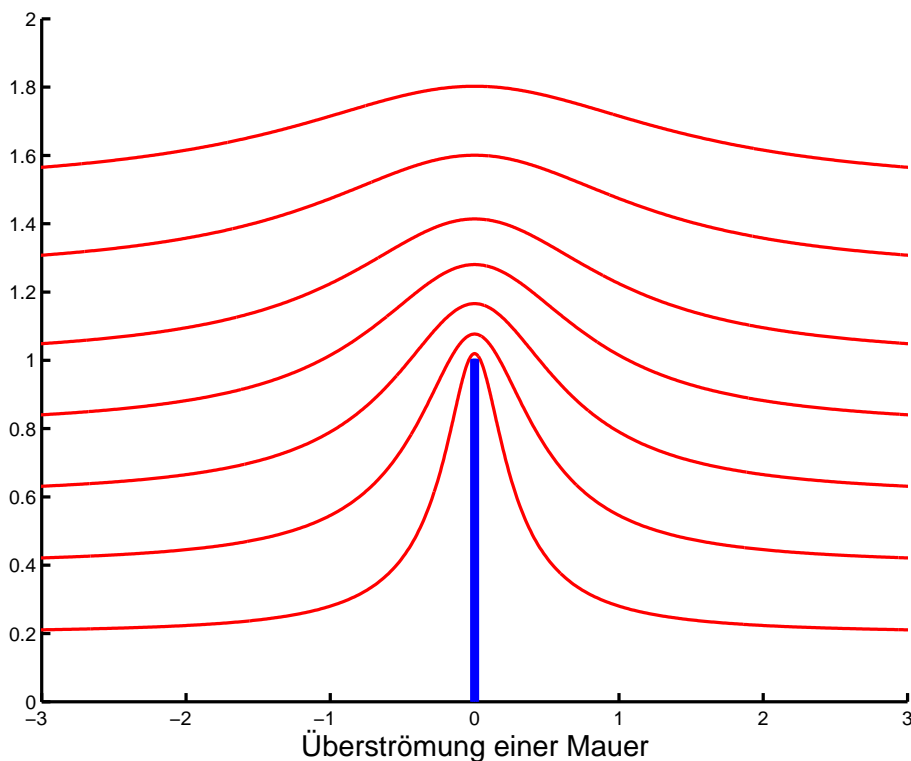
Zur Berechnung der Stromlinien für die nichtturbulente Überströmung einer Mauer lässt sich die folgende konforme Gebiets-  
transformation verwenden  $w = f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ .  $f$  bildet (bei  
geeigneter Wahl der Wurzel) die zwischen  $z = 0$  und  $z = i$  ge-  
schlitzte obere Halbebene

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0, z \notin [0, 1]i\}$$

in die obere Halbebene  $\text{Im}(w) > 0$  (ohne Hindernis) ab.

Mit Hilfe der Umkehrabbildung  $z = f^{-1}(w) = i\sqrt{1 - w^2}$  lassen  
sich dann unmittelbar die Urbilder der Stromlinien des Modell-  
problems  $\text{Im}(w) = \text{const.}$  zeichnen.

83



84



### Anwendung III: Probleme der Elektrostatik

Zu berechnen sei die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}(x, y)$  in einem ladungsfreien Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ , wobei das Potential  $U(x, y)$  mit  $\mathbf{E} = -\nabla U$  am Rand des Gebietes  $D$  vorgegeben ist. Da  $\mathbf{E}$  auf  $D$  divergenzfrei ist, folgt insbesondere  $\Delta U = 0$ , d.h.  $U$  ist Lösung eines Dirichlet-Problems

$$\Delta U = 0, \quad z = (x, y) \in D, \quad U(z) = U_0(z), \quad z \in \partial D. \quad (5.16)$$

Nach Früherem ist  $U$  damit Realteil einer auf  $D$  holomorphen Funktion  $\Phi(z) = U(z) + iV(z)$ , dem so genannten **komplexen Potential**.

Wieder heißt  $V$  die **Stromfunktion**,  $U(x, y) = \text{const.}$  beschreibt die **Äquipotentiallinien**,  $V(x, y) = \text{const.}$  die **Feldlinien**.

85

Ebenfalls kann man das elektrische Feld wieder direkt aus dem komplexen Potential gewinnen vermöge

$$\mathbf{E} = -(U_x + iU_y) = -(U_x - iV_x) = -\overline{\Phi'(z)}. \quad (5.17)$$

Die Grundidee lässt sich übertragen: Man transformiere das Gebiet  $D$  vermöge einer konformen Abbildung (bijektiv) in ein einfacheres Gebiet  $\tilde{D}$  und löse das Modellproblem

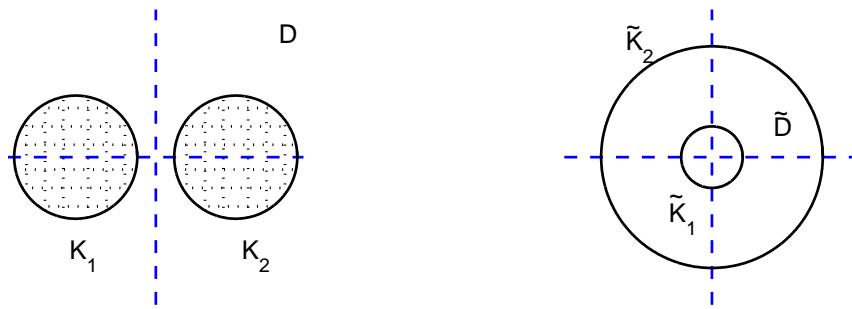
$$\Delta \tilde{U}(w) = 0, \quad w \in \tilde{D}, \quad \tilde{U}(w) = \tilde{U}_0(w), \quad w \in \partial \tilde{D}.$$

Dabei ist  $\tilde{U}_0 := U_0 \circ f^{-1}$  die transformierte Randfunktion.

Anschließend transformiere man die Lösung zurück:  $U := \tilde{U} \circ f$ .

86

**Beispiel (5.18)** Wir bestimmen die Feldlinien in Außenraum von zwei stromdurchflossenen Leitern mit Querschnitten  $K_1$  und  $K_2$ .



Sind  $a, b$  mit  $0 < a < b$  bzw.  $-a$  und  $-b$  die Schnittpunkte der Querschnittskreise mit der  $x$ -Achse, so wird durch

$$w = f(z) = \frac{p + z}{p - z}, \quad p := \sqrt{ab},$$

eine Möbius-Transformation beschrieben, die  $D$  konform auf den Kreisring  $\tilde{D} := \{w : 1/\rho < |w| < \rho\}$ ,  $\rho := (\sqrt{a} + \sqrt{b})/(\sqrt{b} - \sqrt{a})$ , abbildet, vgl. Beispiel (3.12).

87

Nehmen wir an, dass die Randfunktionen im physikalischen Problem konstant sind

$$U(z) = -U_0, \quad z \in K_1, \quad U(z) = U_0, \quad z \in K_2,$$

so erhalten wir das folgende Modellproblem

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{U} &= 0, & w \in \tilde{D}, \\ \tilde{U}(w) &= -U_0, & w \in \tilde{K}_1, \quad \tilde{U}(w) = U_0, & w \in \tilde{K}_2. \end{aligned}$$

Aufgrund der Ursprungssymmetrie des Modellproblems kann man annehmen, dass  $\tilde{U} = \tilde{U}(r)$  nur vom Abstand  $r$  zum Ursprung abhängt. Damit erhalten wir eine gewöhnliche Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \tilde{U}''(r) + \frac{1}{r} \tilde{U}'(r) &= 0, \\ \tilde{U}(1/\rho) &= -U_0, \quad \tilde{U}(\rho) = U_0. \end{aligned}$$

Die Lösung lautet  $\tilde{U}(r) = \frac{U_0}{\ln \rho} \ln r$ ,  $1/\rho \leq r \leq \rho$ .

88

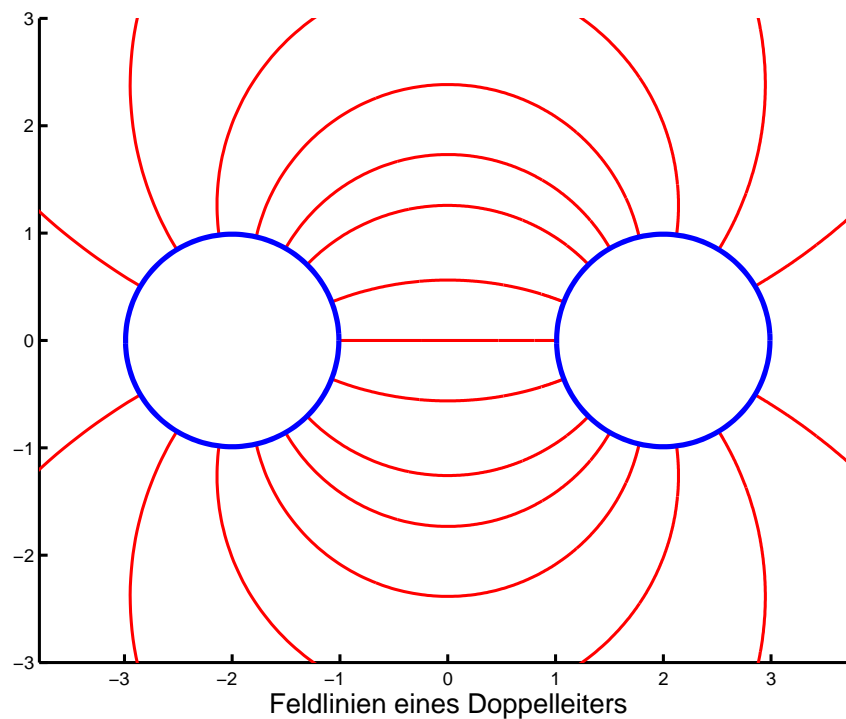
Die Rücktransformation ergibt schließlich

$$U(z) = \frac{U_0}{\ln \rho} \ln |f(z)|, \quad f(z) = \frac{p+z}{p-z},$$

$$p = \sqrt{ab}, \quad \rho = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}.$$

Zur Darstellung die Feldlinien genügt es, die Feldlinien des Modellproblems  $w = r e^{i\phi}$ ,  $1/\rho \leq r \leq \rho$ , vermöge  $z = f^{-1}(w)$  zurück zu transformieren.

89



90