Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2018**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

a) Man bestimme das Bild von

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(z)\ ,\ 0 \leq \mathrm{Im}(z)\ ,\ \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \leq 1\}$$

unter der durch $f(z) = ((1+i)z)^2$ definierten Abbildung.

b) Gegeben seien $z_1 = 2 + \dfrac{\pi i}{3}$ und $z_2 = -1 + \dfrac{2\pi i}{3}$. Man berechne

$$\exp(z_1)\ ,\ \exp(z_2) \ \text{ und } \ \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der e-Funktion in $\mathbb{C}$:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)\ .$$

Aufgabe 6:

a) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus ln und $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ und $z_2 = -2i$ berechne man

$$\ln(z_1)\ ,\ \ln(z_2) \ \text{ und } \ \ln(z_1 z_2),$$

und überprüfe an diesem Beispiel, ob für den Hauptwert die Funktionalgleichung gilt:

$$\ln(z_1) + \ln(z_2) = \ln(z_1 z_2)\ .$$

b) Die cos-Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\ .$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von $\cos z$ und bestimme alle Lösungen von $\cos z = 3$.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Joukowski-Funktion $w = f(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{z}{4} + \frac{4}{z}\right)$.

a) Man bestimme die Bilder

(i) des Kreises $|z| = 5$,

(ii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) < 0$, $\mathrm{Im}(z) = 0$,

(iii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) < 0$.

b) Man berechne die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ für $|z| > 4$.

Aufgabe 8:

Für die Inversion $w = f(z) := \frac{1}{z}$ mit $z \neq 0$ bestimme man das Bild

a) der Geraden $\mathrm{Re}(z) = 2$,

b) des Strahls $\mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) = 0$,

c) des Kreises $|z| = 3$,

d) des Kreises $|z - 2i| = 2$ und

e) des Kreises $|z - 2i| = 1$.

Abgabetermin: 30.4.-4.5. (zu Beginn der Übung)