Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2018**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Gegeben sei die Abbildung $T: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit

$$T(z) = \frac{z+2}{z-2}\,.$$

a) Handelt es sich bei T um eine Möbius-Transformation?

b) Man berechne die Umkehrabbildung.

c) Man bestimme das Bild der reellen Achse.

d) Man bestimme das Bild des Kreises $|z| = 2$.

e) Man bestimme das Bild der imaginären Achse.

f) Wohin wird der Halbkreis H abgebildet?

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\,,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$

Aufgabe 10:

Gegeben seien die Punkte

$$z_1 = 1,\ z_2 = 1 + 2i,\ z_3 = i$$

und

$$w_1 = 0,\ w_2 = 1 + i,\ w_3 = -1 - i\,.$$

a) Man berechne die Möbius-Transformation T, für die mit $j = 1, 2, 3$ gilt:

$$w_j = T(z_j)\,.$$

b) Liegen $z_0 = 2 + i$ und z_1, z_2, z_3 auf einem (verallgemeinerten) Kreis K?

c) Liegen $w_0 = T(z_0)$ und w_1, w_2, w_3 auf einem (verallgemeinerten) Kreis $T(K)$?

Aufgabe 11:

Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$ mit $T(-1) = 1$ und $T(0) = 0$, die die linke Halbebene $\mathrm{Re}\,(z) \leq 0$ auf die Kreisscheibe $|w-1| \leq R$ abbildet. Wie groß ist R?

Aufgabe 12:

Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^3$ berechne man

a) $A := \dfrac{1}{2}\,(f_x(z_0) - i f_y(z_0))$ und

b) $B := \dfrac{1}{2}\,(f_x(z_0) + i f_y(z_0))$.

Man vergleiche die Ergebnisse mit den Ableitungen von f nach den unabhängigen Variablen z und $\bar{z}$, also mit

$$\frac{\partial f}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,.$$

Dabei sollen die bekannten Ableitungsregeln aus dem Reellen rein formal übertragen werden.

Abgabetermin: 14.5.-18.5. (zu Beginn der Übung)