Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2018**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int_c 2z - 3\,dz$ entlang des geradlinigen Weges von $-1-i$ nach $-i$,

b) $\displaystyle\int_c z\cosh z\,dz$ für $c(t) = it$ mit $0 \le t \le 1$,

c) $\displaystyle\int_{-i}^{1} \frac{z+1}{z}\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert),

d) $\displaystyle\int_{-i}^{i} \sin z\,dz$ für $c(t) = it\,,\ -1 \le t \le 1\,.$

Aufgabe 18:

Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4}\,dz\,,$ b) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z+1}\,dz\,,$ c) $\displaystyle\oint_{|z+i|=1} \frac{\cos z}{(z+i)^2}\,dz\,,$

d) $\displaystyle\oint_{|z-2|=1} \sin z + \frac{\ln z}{(z-2)^2}\,dz\,,$ e) $\displaystyle\oint_{|z+i|=2} \frac{\cos z}{z^3}\,dz$, f) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\cosh z}{(z-i\pi)^5}\,dz\,.$

Aufgabe 19:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{4+\xi^2}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \frac{3}{z^2+2z+5}\,, \quad z_0 = i$ und $z_0 = 0\,,$

(ii) $f(z) = \frac{2}{e^z - 1}\,, \quad z_0 = 2\pi(1+i)\,,$

(iii) $f(z) = \frac{z}{\ln(3-2z)}\,, \quad z_0 = 0$ und $z_0 = \frac{11}{8}\,.$

Aufgabe 20:

Man gebe **alle** Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{5z}{z^2+z-6}$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = i$ an. Wo konvergieren die Reihen jeweils?

Abgabetermin: 18.6.-22.6. (zu Beginn der Übung)