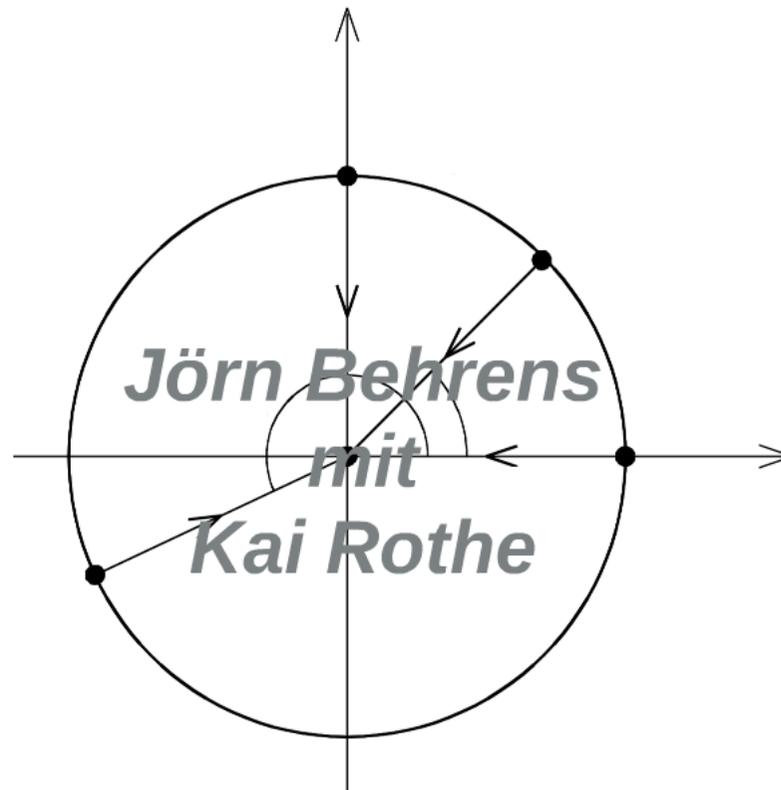


# Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Begriffe und Definitionen

# Infos zum Kurs

## Literatur

Beispiele!

**G. Bärwolff:** *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

**R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, T. Sonar:** *Mathematik für Ingenieure 2* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2011.

**P. Henrici, R. Jeltsch:** *Komplexe Analysis für Ingenieure*, Band 1/2, Birkhäuser Verlag, 1998.

A. Iske: *Skriptum zur Vorlesung KF*, Sommersemester 2016.  
<https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/kf/>

## Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

<https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/>



Materialien:

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/kf/18/m.html>

Bitte gründlich vorbereiten!

# *Literatur*

Beispiele!

**G. Bärwolff:** *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

**R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, T. Sonar:** *Mathematik für Ingenieure 2* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2011.

**P. Henrici, R. Jeltsch:** *Komplexe Analysis für Ingenieure*, Band 1/2, Birkhäuser Verlag, 1998.

A. Iske: *Skriptum zur Vorlesung KF*, Sommersemester 2016.  
<https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/kf/>

# *Übungsleitung und Übungen*

Dr. Kai Rothe

<https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/>



Materialien:

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/kf/18/lm.html>

**Bitte gründlich vorbereiten!**

# Definition und Beispiele

## Definition: (Komplexe Funktion)

Eine **komplexe Funktion** ist eine Funktion, deren Definitions- und Wertebereich jeweils Mengen der Komplexen Ebene sind:

$$f : A \rightarrow B, \quad A, B \subset \mathbb{C}.$$

## Bemerkungen:

- Eine komplexe Funktion  $f : A \rightarrow B$ ,  $A, B \subset \mathbb{C}$  ordnet jedem  $z \in A$  ein eindeutiges  $w = F(z) \in B$  zu.
- Die Abbildungsvorschrift  $f : z \mapsto f(z)$ ,  $z \in A$  ist **explizit** gegeben.
- Komplexe Funktionen lassen sich auch **implizit** definieren.

## Beispiele:

- $f(z) = (3z + 1)^2$  für  $z \in \mathbb{C}$
- $f(z) = \exp(ix) + y$  für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$
- $f(z) = \frac{1}{z}$  für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

1

## Vereinbarungen:

- Verwende  $z \in \mathbb{C}$  für das **Urbild** von  $f$
- Verwende  $w \in \mathbb{C}$  für den **Wert** von  $f$
- Notiere  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$
- Also  $u = \operatorname{Re}(w)$  und  $v = \operatorname{Im}(w)$
- Oder auch  $u(z) = \operatorname{Re}(f(z))$  und  $v(z) = \operatorname{Im}(f(z))$

**Spezialfall:** Betrachte komplexwertige Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  mit einer reellwertigen Variablen, d.h.  $I \subset \mathbb{R}$ :

$$f : t \mapsto f(t) \in \mathbb{C} \quad \text{für } t \in I.$$

Beispiele:

- $f(t) = a + bt$  für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $b \neq 0$
- $f(t) = \exp(i\omega t)$  für  $\omega \in ]0, \infty[$ ,  $\mathbb{R}$

## **Definition:** (Komplexe Funktion)

Eine **komplexe Funktion** ist eine Funktion, deren Definitions- und Wertebereich jeweils Mengen der Komplexen Ebene sind:

$$f : A \rightarrow B, \quad A, B \subset \mathbb{C}.$$

## **Bemerkungen:**

- Eine komplexe Funktion  $f : A \rightarrow B$ ,  $A, B \subset \mathbb{C}$  ordnet jedem  $z \in A$  ein eindeutiges  $w = F(z) \in B$  zu.
- Die Abbildungsvorschrift  $f : z \mapsto f(z)$ ,  $z \in A$  ist **explizit** gegeben.
- Komplexe Funktionen lassen sich auch **implizit** definieren.

## Beispiele:

- $f(z) = (3z + 1)^2$  für  $z \in \mathbb{C}$
- $f(z) = \exp(ix) + y$  für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$
- $f(z) = \frac{1}{z}$  für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

## Vereinbarungen:

- Verwende  $z \in \mathbb{C}$  für das **Urbild** von  $f$
- Verwende  $w \in \mathbb{C}$  für den **Wert** von  $f$
- Notiere  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$
- Also  $u = \operatorname{Re}(w)$  und  $v = \operatorname{Im}(w)$
- Oder auch  $u(z) = \operatorname{Re}(f(z))$  und  $v(z) = \operatorname{Im}(f(z))$



**Spezialfall:** Betrachte komplexwertige Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  mit einer reellwertigen Variablen, d.h.  $I \subset \mathbb{R}$ :

$$f : t \mapsto f(t) \in \mathbb{C} \quad \text{für } t \in I.$$

**Beispiele:**

- $f(t) = a + bt$  für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $b \neq 0$
- $f(t) = \exp(i\omega t)$  für  $\omega \in ]0, \infty[ \subset \mathbb{R}$

# Lineare Funktionen

## Definition: (Lineare Funktion)

Eine komplexe Funktion  $f$  heißt **linear**, falls  $f$  für feste komplexe Konstanten  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$f(z) = az + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Frage: Wie lassen sich lineare Funktionen geometrisch interpretieren?

### Spezialfälle:

1.  $a = 1$  (**Translation**):  $f(z) = z + b$  für  $z \in \mathbb{C}$ .
2.  $a \in ]0, \infty[$ ,  $b = 0$  (**Skalierung**): Falls  $a > 1$ , so wird  $z$  gestreckt, sonst gestaucht:  $f(z) = az$ .
3.  $|a| = 1$ ,  $b = 0$  (**Rotation**):  $f(z) = az = z \exp(i\alpha)$ , wobei  $a = \exp(i\alpha)$ ,  $\alpha \in ]0, 2\pi[$ .
4.  $0 \neq a \in \mathbb{C}$ ,  $b = 0$  (**Drehstreckung**):  $f(z) = az$  ist Komposition aus Rotation und Skalierung. Falls  $a = |a| \exp(i\alpha)$ , so bewirkt  $f$  Rotation um  $\alpha \in ]0, 2\pi[$  und Skalierung um  $|a|$ .

2

### Allgemeiner Fall (Folgerung aus Spezialfällen):

Für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition  $f = f_T \circ f_S \circ f_R$  von drei Abbildungen schreiben:

- $f_R(z) = \exp(i\alpha)z$  einer Drehung um den Winkel  $\alpha \in ]0, 2\pi[$ ,
- $f_S(z) = |a|z$  einer Skalierung um den Skalierungsfaktor  $|a| > 0$ ,
- $f_T(z) = z + b$  einer Translation um den Vektor  $b$ .

**Bemerkung:** Drehung  $f_R$  und Streckung  $f_S$  kommutieren, d.h. lassen sich vertauschen. Es gilt

$$f_S \circ f_R = f_R \circ f_S,$$

oder

$$f_T \circ f_S \circ f_R = f_T \circ f_R \circ f_S.$$



**Definition:** (Lineare Funktion)

Eine komplexe Funktion  $f$  heißt **linear**, falls  $f$  für feste komplexe Konstanten  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$f(z) = az + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

**Frage:** Wie lassen sich lineare Funktionen geometrisch interpretieren?

**Spezialfälle:**

1.  $a = 1$  (**Translation**):  $f(z) = z + b$  für  $z \in \mathbb{C}$ .
2.  $a \in ]0, \infty[$ ,  $b = 0$  (**Skalierung**): Falls  $a > 1$ , so wird  $z$  gestreckt, sonst gestaucht:  $f(z) = az$ .
3.  $|a| = 1$ ,  $b = 0$  (**Rotation**):  $f(z) = az = z \exp(i\alpha)$ , wobei  $a = \exp(i\alpha)$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi[$ .
4.  $0 \neq a \in \mathbb{C}$ ,  $b = 0$  (**Drehstreckung**):  $f(z) = az$  ist Komposition aus Rotation und Skalierung. Falls  $a = |a| \exp(i\alpha)$ , so bewirkt  $f$  Rotation um  $\alpha \in [0, 2\pi[$  und Skalierung um  $|a|$ .

**Allgemeiner Fall** (Folgerung aus Spezialfällen):

Für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition  $f = f_T \circ f_S \circ f_R$  von drei Abbildungen schreiben:

- $f_R(z) = \exp(i\alpha)z$  einer Drehung um den Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi[$ ,
- $f_S(z) = |a|z$  einer Skalierung um den Skalierungsfaktor  $|a| > 0$ ,
- $f_T(z) = z + b$  einer Translation um den Vektor  $b$ .

**Bemerkung:** Drehung  $f_R$  und Streckung  $f_S$  kommutieren, d.h. lassen sich vertauschen. Es gilt

$$f_S \circ f_R = f_R \circ f_S,$$

oder

$$f_T \circ f_S \circ f_R = f_T \circ f_R \circ f_S.$$

# Quadratische Funktionen

## Definition: (Quadratische Funktion)

Eine komplexe Funktion  $f$  heißt **quadratisch**, falls  $f$  für feste komplexe Konstanten  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \neq 0$  eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$f(z) = az^2 + bz + c \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

## Bemerkung: (Geometrisches Verhalten)

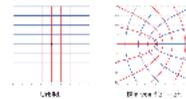
Idee: Betrachte zunächst für  $f(z) = z^2$ ,  $z \in \mathbb{C}$  die Bilder der achsenparallelen Geraden unter  $f$ .

Setze  $w = z^2$ ,  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , dann ergibt sich

$$\begin{aligned} w = u + iv = z^2 &= (x - iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \\ \Rightarrow u = x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad v = 2xy. \end{aligned}$$

3

Bilder achsenparalleler Geraden unter  $z \mapsto z^2$ .



## Allgemeine quadratische Funktionen:

Für  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \neq 0$  lässt sich jede quadratische Funktion

$$f(z) = az^2 + bz + c = a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c$$

als Komposition  $f = f_{T_2} \circ f_R \circ f_Q \circ f_{T_1}$  von vier Abbildungen schreiben:

- $f_{T_1}(z) = z + \frac{b}{2a}$  einer Translation,
- $f_Q(z) = z^2$  einer quadratischen Funktion,
- $f_R(z) = az$  einer Drehstreckung,
- $f_{T_2}(z) = z - \frac{b^2}{4a^2} + c$  einer weiteren Translation.

# Funktionen

**Definition:** (Quadratische Funktion)

Eine komplexe Funktion  $f$  heißt **quadratisch**, falls  $f$  für feste komplexe Konstanten  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \neq 0$  eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$f(z) = az^2 + bz + c \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

**Bemerkung:** (Geometrisches Verhalten)

Idee: Betrachte zunächst für  $f(z) = z^2$ ,  $z \in \mathbb{C}$  die Bilder der achsenparallelen Geraden unter  $f$ .

Setze  $w = z^2$ ,  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , dann ergibt sich

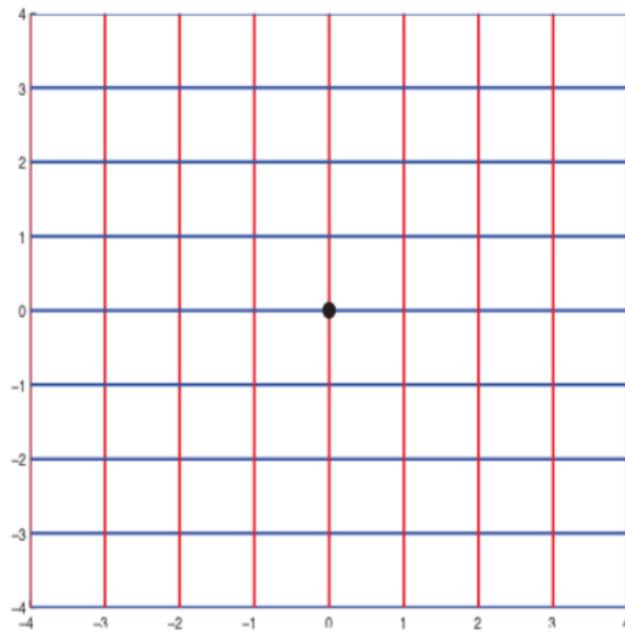
$$\begin{aligned} w = u + iv = z^2 &= (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \\ \Rightarrow u = x^2 - y^2 &\quad \text{und} \quad v = 2xy. \end{aligned}$$

3

Bilder achsenparalleler Geraden unter  $z \mapsto z^2$ .



# Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$ .



Urbild.

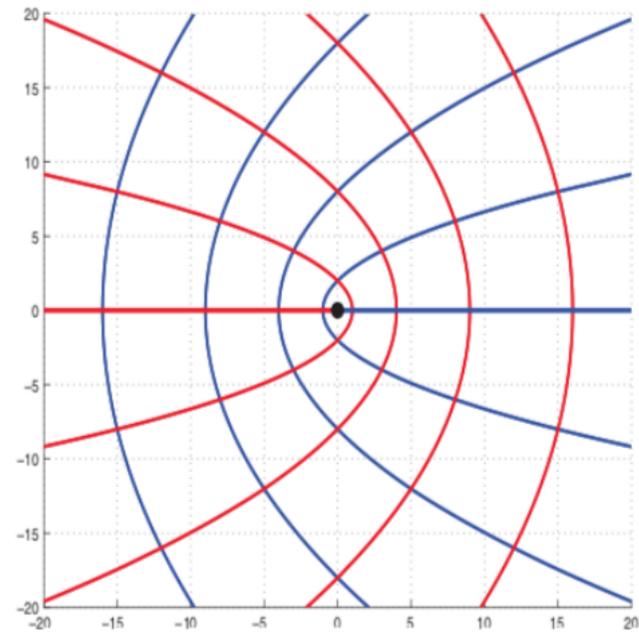


Bild von  $f(z) = z^2$ .

## Allgemeine quadratische Funktionen:

Für  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \neq 0$  lässt sich jede quadratische Funktion

$$f(z) = az^2 + bz + c = a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c$$

als Komposition  $f = f_{T_2} \circ f_R \circ f_Q \circ f_{T_1}$  von vier Abbildungen schreiben:

- $f_{T_1}(z) = z + \frac{b}{2a}$  einer Translation,
- $f_Q(z) = z^2$  einer quadratischen Funktion,
- $f_R(z) = az$  einer Drehstreckung,
- $f_{T_2}(z) = z - \frac{b^2}{4a^2} + c$  einer weiteren Translation.

# Exponential-Funktion

**Definition:** (Exponentialfunktion)

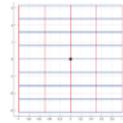
Die komplexe **Exponentialfunktion**  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert:

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) \quad z = x + iy..$$

**Bemerkung:** Es gilt das Additionstheorem ( $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ):

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Bilder achsenparalleler Geraden unter  $z \mapsto \exp(z)$ .



Urbild.



Bild von  $f(z) = \exp(z)$ .

**Bilder achsenparalleler Geraden unter  $z \mapsto \exp(z)$ .**

Für das Bild einer zur  $v$ -Achse parallelen Gerade  $x = x_0$  bekommt man

$$y = e^{x_0} \cos(y) \quad \text{und} \quad v = e^{x_0} \sin(y)$$

- Für festes  $x_0$  ergibt dies einen Kreis um Null mit Radius  $e^{x_0}$ .
- **Rechte:** Die Nullstelle liegt nicht in der RM der Exponentialfunktion, d.h. es gibt kein Argument  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\exp(z) = z$ . Somit gilt  $e^z \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- **Rechteckung:** Die Exponentialfunktion bildet Rechteckgitter im kartesischen Koordinatensystem auf Kreis- und Kreisbögen ab, die sich rechtwinklig schneiden.
- **Grenzen:** Kreise, die sich im kartesischen Koordinatensystem rechtwinklig schneiden, werden unter der Exponentialfunktion auf Kreise abgebildet, die sich ebenso (in einem Scherpunkt) rechtwinklig schneiden.
- **Nicht abgeschlossen:** Die Exponentialfunktion ist in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  **surjektiv** (how **surject**). Grenzwert Details dazu siehe

**Geometrische Interpretation:**

Für  $w = \exp(z)$ ,  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$  bekommen wir

$$w = u + iv = e^z = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$$

und somit

$$u = e^x \cos(y) \quad \text{und} \quad v = e^x \sin(y).$$

**Bilder achsenparalleler Geraden unter  $z \mapsto \exp(z)$ .**

Für das Bild einer zur  $u$ -Achse parallelen Gerade  $y = y_0$  bekommt man

$$u = e^x \cos(y_0)$$

$$v = e^x \sin(y_0)$$

- Für festes  $y_0$  ergibt dies eine Gerade mit konstantem Abstand, die mit der positiven  $u$ -Achse des Strahlensystems verläuft.
- Für Winkel  $y_0$  und  $y_1$ , die sich um ein Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, d.h.  $y_1 = y_0 + 2\pi k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$  ergibt sich der gleiche Strahl.
- **Grenzen:** Wegen der **Periodizität** von  $\exp(z)$  gilt  $e^{z+2\pi i k} = e^z e^{2\pi i k} = e^z (\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k)) = e^z (1 + i \cdot 0) = e^z$ .  
Zwei Punkte mit gleichem Realteil, deren Imaginärteil sich um ein Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, werden auf den gleichen Punkt abgebildet.

# Funktion

**Definition:** (Exponentialfunktion)

Die komplexe **Exponentialfunktion**  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert:

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \quad z = x + iy..$$

**Bemerkung:** Es gilt das Additionstheorem ( $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ):

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

## Geometrische Interpretation:

Für  $w = \exp(z)$ ,  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$  bekommen wir

$$w = u + iv = e^z = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

und somit

$$u = e^x \cos(y) \quad \text{und} \quad v = e^x \sin(y).$$

## Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$ .

Für das Bild einer zur  $x$ -Achse parallelen Geraden  $y \equiv y_0$  bekommt man somit

$$u = e^x \cos(y_0)$$

$$v = e^x \sin(y_0)$$

- Für festes  $y_0$  ergibt dies ein vom Ursprung ausgehenden Strahl, der mit der positiven  $x$ -Achse den Winkel  $y_0$  einschließt.
- Für Winkel  $y_0$  und  $y_1$ , die sich um ein Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, d.h.

$$y_1 = y_0 + 2\pi k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

ergibt sich der gleiche Strahl.

- Genauer: Wegen der **Periodizität** von  $\exp(z)$  gilt

$$e^{z+2\pi ik} = e^z e^{2\pi ik} = e^z (\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k)) = e^z \cdot 1 = e^z.$$

d.h. zwei Punkte mit gleichen Realteilen, deren Imaginärteile sich um ein Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, werden auf den gleichen Punkt abgebildet.



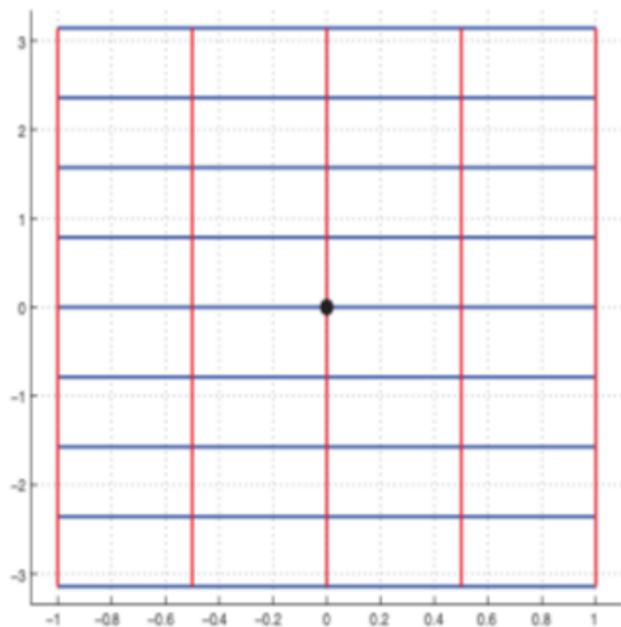
## Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$ .

Für das Bild einer zur  $y$ -Achse parallelen Geraden  $x \equiv x_0$  bekommt man

$$u = e^{x_0} \cos(y) \quad \text{und} \quad v = e^{x_0} \sin(y)$$

- Für festes  $x_0$  ergibt dies einen Kreis um Null mit Radius  $e^{x_0}$ .
- **Beachte:** Der Nullpunkt liegt nicht im Bild der Exponentialfunktion, d.h. es gibt kein Argument  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\exp(z) = 0$ . Somit gilt  $e^z \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- **Beobachtung:** Die Exponentialfunktion bildet Rechtecksgitter im kartesischen Koordinatensystem auf Netz von Kurven ab, die sich rechtwinklig schneiden.
- **Genauer:** Kurven, die sich im kartesischen Koordinatensystem rechtwinklig schneiden, werden unter der Exponentialfunktion  $\exp$  auf Kurven abgebildet, die sich ebenso (im jeweiligen Schnittpunkt) rechtwinklig schneiden.
- **Noch allgemeiner:** Die Exponentialfunktion ist in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  **winkeltreu** (bzw. **konform**). Genauere Details dazu später.

# Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$ .



Urbild.

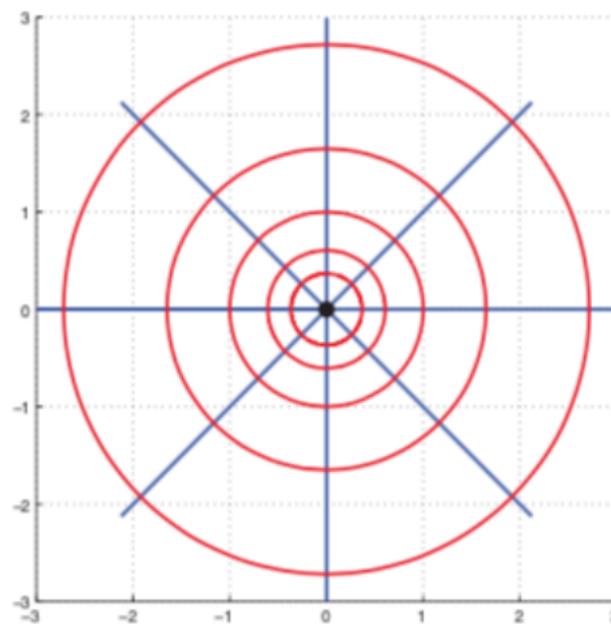


Bild von  $f(z) = \exp(z)$ .

# Umkehrfunktion

## Definition: (injektive Funktion)

Eine komplexe Funktion  $f(z)$  heißt **eindeutig (injektiv)**, falls es zu jedem Punkt  $w \in \mathbb{C}$  ihres Wertebereiches genau einen Punkt  $z \in \mathbb{C}$  ihres Definitionsbereiches gibt, so dass  $f(z) = w$ .

### Bemerkungen

- Injektive Funktionen nehmen jeden Wert ihres Wertebereiches genau einmal an.
- Injektive Funktionen heißen auch **schlicht**.

### Beispiele:

- $f(z) = az + b, a \neq 0$     • **injektiv**
- $f(z) = z^2$     • **nicht injektiv**, da  $f(z) = f(-z)$
- $f(z) = \exp(z)$     • **nicht injektiv**, da  $\exp(z) = \exp(z + 2\pi i)$

## Einschränkung des Definitionsbereichs.

**Bemerkung:** Eine nicht injektive Funktion wird ggf. durch eine geeignete Einschränkung ihres Definitionsbereiches injektiv.

**Beispiel:** Betrachte die quadratische Funktion

$$f(z) = z^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(z) > 0$$

auf der **rechten Halbebene** ( $z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0$ ). Hier ist  $f$  injektiv.

Weiterhin ist in diesem Fall der Bildbereich gegeben durch die **aufgeschlitzene komplexe Ebene**

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(z) > 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\} \end{aligned}$$

## Definition: (Umkehrfunktion)

Sei  $f$  eine (komplexe) injektive Funktion mit Definitionsbereich  $D(f)$  und Wertebereich  $W(f)$ .

Dann ist die **Umkehrfunktion**  $f^{-1}: W(f) \rightarrow D(f)$  zu  $f$  definiert durch die Abbildung, welche jedem  $w \in W(f)$  den (eindeutigen) Punkt  $z \in D(f)$  zuordnet, d.h. es gilt

$$f^{-1}(w) = z.$$

Anders ausgedrückt gilt für alle  $z \in D(f)$  und  $w \in W(f)$ :

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(z) &= z, \\ (f \circ f^{-1})(w) &= w. \end{aligned}$$

Wichtig: Umkehrfunktion existiert nur für injektive Funktionen!

## Umkehrfunktion der n-ten Potenz.

**Beispiel:** Die Potenzfunktion

$$f(z) = z^n \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 2$$

ist für den Definitionsbereich

$$D(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n} \right\}$$

injektiv. Für den Wertebereich bekommt man in diesem Fall  $W(f) = \mathbb{C}^-$ .

Für die Umkehrfunktion  $f^{-1}: W(f) \rightarrow D(f)$  gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt[n]{re^{i\varphi/n}} \quad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right).$$

**Definition:** (Injektive Funktion)

Eine komplexe Funktion  $f(z)$  heißt **eindeutig (injektiv)**, falls es zu jedem Punkt  $w \in \mathbb{C}$  ihres Wertebereiches genau einen Punkt  $z \in \mathbb{C}$  ihres Definitionsbereiches gibt, so dass  $f(z) = w$ .

**Bemerkungen:**

- Injektive Funktionen nehmen jeden Wert ihres Wertebereiches genau einmal an.
- Injektive Funktionen heißen auch **schlicht**.

**Beispiele:**

- $f(z) = az + b, a \neq 0$       • injektiv
- $f(z) = z^2$       • **nicht** injektiv, da  $f(z) = f(-z)$
- $f(z) = \exp(z)$       • **nicht** injektiv, da  $\exp(z) = \exp(z + 2\pi ik)$

## Einschränkung des Definitionsbereichs.

**Bemerkung:** Eine nicht injektive Funktion wird ggf. durch eine geeignete Einschränkung ihres Definitionsbereichs injektiv.

**Beispiel:** Betrachte die quadratische Funktion

$$f(z) = z^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(z) > 0$$

auf der **rechten Halbebene**  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ . Hier ist  $f$  injektiv.

Weiterhin ist in diesem Fall der Bildbereich gegeben durch die **aufgeschnittene komplexe Ebene**

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(z) > 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\} \end{aligned}$$

## Definition: (Umkehrfunktion)

Sei  $f$  eine (komplexe) injektive Funktion mit Definitionsbereich  $D(f)$  und Wertebereich  $W(f)$ .

Dann ist die **Umkehrfunktion**  $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$  zu  $f$  definiert durch die Abbildung, welche jedem  $w \in W(f)$  den (eindeutigen) Punkt  $z \in D(f)$  zuordnet, d.h. es gilt

$$f^{-1}(w) = z.$$

Anders ausgedrückt gilt für alle  $z \in D(f)$  und  $w \in W(f)$ :

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(z) &= z, \\ (f \circ f^{-1})(w) &= w.\end{aligned}$$

Beispiel: Für den Definitionsbereich  
 $D(f) = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0 \text{ und } -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$   
existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f(z) = z^2$  mit Wertebereich  $W(f) = \mathbb{C}^*$ .  
Für den **Hauptwert** der **Kurzel**  $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$  gilt  
 $w = f^{-1}(z) = \sqrt{z}$  für  $z = re^{i\varphi}$  mit  $\varphi = \arg(z) \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

**Beispiel:** Für den Definitionsbereich

$$D(f) = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0 \text{ und } -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$$

existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f(z) = z^2$  mit Wertebereich  $W(f) = \mathbb{C}^-$ .

Für den **Hauptwert der Wurzel**  $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$  gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \quad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in (-\pi/2, \pi/2).$$

# Umkehrfunktion der $n$ -ten Potenz.

**Beispiel:** Die Potenzfunktion

$$f(z) = z^n \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 2$$

ist für den Definitionsbereich

$$D(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n} \right\}$$

injektiv. Für den Wertebereich bekommt man in diesem Fall  $W(f) = \mathbb{C}^-$ .

Für die Umkehrfunktion  $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$  gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt[n]{r}e^{i\varphi/n} \quad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right).$$

## Lineare Funktionen

**Definition:** Eine Funktion  $f: D \rightarrow W$  heißt linear, wenn sie die Form  $f(x) = mx + b$  annimmt, wobei  $m$  die Steigung und  $b$  der y-Achsenabschnitt ist.

**Wichtige Eigenschaften:**  
- Die Graphen linearer Funktionen sind Geraden.  
- Die Steigung  $m$  ist konstant.  
- Die Nullstelle (x-Wert, bei dem  $f(x) = 0$ ) ist  $x = -b/m$ .

## Definition und Beispiele

**Definition:** Eine Funktion  $f: D \rightarrow W$  ist eine Zuordnung, die jedem Element  $x$  in  $D$  genau ein Element  $f(x)$  in  $W$  zuordnet.

**Beispiel:** Die Funktion  $f(x) = 2x + 1$  ist eine lineare Funktion.

**Wichtig:** Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist keine lineare Funktion, da sie die Form  $f(x) = mx + b$  nicht annimmt.

0

**Wichtig:** Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist eine quadratische Funktion.

## Quadratische Funktionen

**Definition:** Eine Funktion  $f: D \rightarrow W$  heißt quadratisch, wenn sie die Form  $f(x) = ax^2 + bx + c$  annimmt, wobei  $a \neq 0$  ist.

**Wichtige Eigenschaften:**  
- Die Graphen quadratischer Funktionen sind Parabeln.  
- Die Steigung ist nicht konstant.

**Wichtig:** Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist eine quadratische Funktion.

### Kernpunkte Funktionen

Definition

Beispiel

Wichtig

### Infos zum Kurs

Thema

Datum

Ort

## Umkehrfunktion

**Definition:** Die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  einer Funktion  $f$  ist die Funktion, die  $f$  umkehrt, d.h.  $f^{-1}(f(x)) = x$  und  $f(f^{-1}(y)) = y$ .

**Wichtig:** Die Umkehrfunktion existiert nur, wenn die Funktion  $f$  bijektiv ist.

**Beispiel:** Die Umkehrfunktion der linearen Funktion  $f(x) = 2x + 1$  ist  $f^{-1}(x) = (x - 1)/2$ .

## Exponentialfunktion

**Definition:** Die Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$  ist eine Funktion, die die Form  $f(x) = a^x$  annimmt, wobei  $a > 0$  und  $a \neq 1$  ist.

**Wichtig:** Die Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$  ist eine bijektive Funktion.

**Beispiel:** Die Exponentialfunktion  $f(x) = 2^x$  ist eine bijektive Funktion.

**Wichtig:** Die Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$  ist eine bijektive Funktion.

**Beispiel:** Die Exponentialfunktion  $f(x) = 2^x$  ist eine bijektive Funktion.