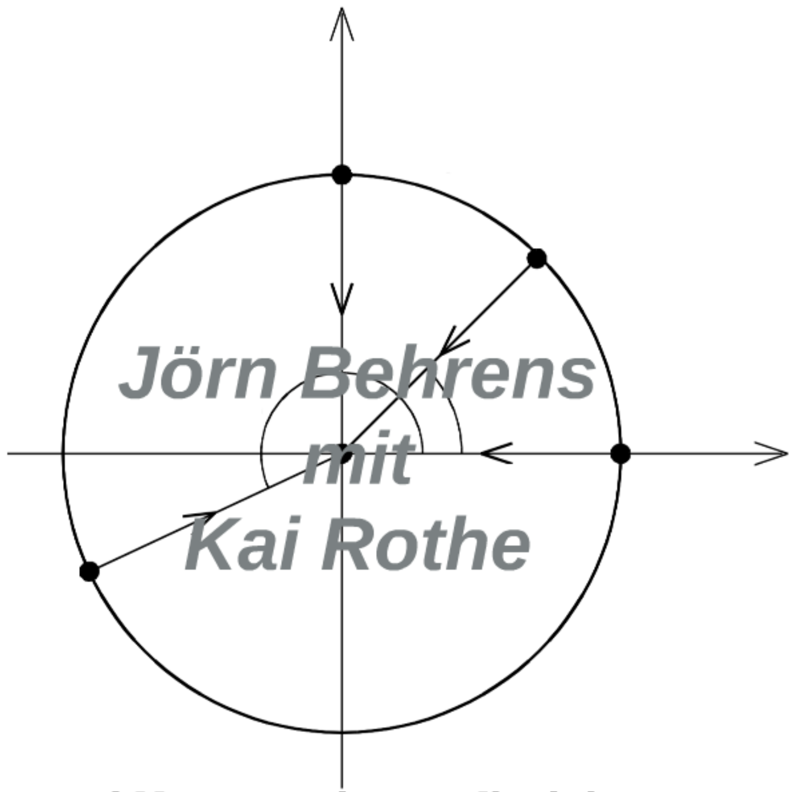
Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Begriffe und Definitionen

Infos zum Kurs

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, T. Sonar: *Mathematik für Ingenieure 2* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2011.

P. Henrici, R. Jeltsch: *Komplexe Analysis für Ingenieure*, Band 1/2, Birkhäuser Verlag, 1998.

A. Iske: *Skriptum zur Vorlesung KF*, Sommersemester 2016.
https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/kf/

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/kf/18/lm.html

Bitte gründlich vorbereiten!

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, T. Sonar: *Mathematik für Ingenieure 2* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2011.

P. Henrici, R. Jeltsch: *Komplexe Analysis für Ingenieure*, Band 1/2, Birkhäuser Verlag, 1998.

A. Iske: *Skriptum zur Vorlesung KF*, Sommersemester 2016.
https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/kf/

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/kf/18/lm.html

Bitte gründlich vorbereiten!

Definition und Beispiele

Definition: (Komplexe Funktion)
Eine komplexe Funktion ist eine Funktion, deren Definitions- und Wertebereich jeweils Mengen der Komplexen Ebene sind:

$$f : A \to B, \quad A, B \subset \mathbb{C}.$$

Bemerkungen:

- Eine komplexe Funktion $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{C}$ ordnet jedem $z \in A$ ein eindeutiges $w = F(z) \in B$ zu.
- Die Abbildungsvorschrift $f : z \mapsto f(z)$, $z \in A$ ist explizit gegeben.
- Komplexe Funktionen lassen sich auch implizit definieren.

Beispiele:

- $f(z) = (3z + 1)^2$ für $z \in \mathbb{C}$
- $f(z) = \exp(ix) + y$ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$
- $f(z) = \frac{1}{z}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

Vereinbarungen:

- Verwende $z \in \mathbb{C}$ für das Urbild von f
- Verwende $w \in \mathbb{C}$ für den Wert von f
- Notiere $z = x + iy$ und $w = u + iv$
- Also $u = \mathrm{Re}(w)$ und $v = \mathrm{Im}(w)$
- Oder auch $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ und $v(z) = \mathrm{Im}(f(z))$

Spezialfall: Betrachte komplexwertige Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ mit einer reellwertigen Variablen, d.h. $I \subset \mathbb{R}$:

$$f : t \mapsto f(t) \in \mathbb{C} \quad \text{für } t \in I.$$

Beispiele:

- $f(t) = a + bt$ für $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$
- $f(t) = \exp(i\omega t)$ für $\omega \in]0, \infty[\subset \mathbb{R}$

und Beispiele

Definition: (Komplexe Funktion)
Eine komplexe Funktion ist eine Funktion, deren Definitions- und Wertebereich jeweils Mengen der Komplexen Ebene sind:

$$f : A \to B, \quad A, B \subset \mathbb{C}.$$

Bemerkungen:

- Eine komplexe Funktion $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{C}$ ordnet jedem $z \in A$ ein eindeutiges $w = F(z) \in B$ zu.
- Die Abbildungsvorschrift $f : z \mapsto f(z)$, $z \in A$ ist explizit gegeben.
- Komplexe Funktionen lassen sich auch implizit definieren.

Beispiele:

- $f(z) = (3z+1)^2$ für $z \in \mathbb{C}$
- $f(z) = \exp(ix) + y$ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$
- $f(z) = \frac{1}{z}$ für $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$

1

Vereinbarungen:

- Verwende $z \in \mathbb{C}$ für das Urbild von f
- Verwende $w \in \mathbb{C}$ für den Wert von f
- Notiere $z = x + iy$ und $w = u + iv$
- Also $u = \mathrm{Re}(w)$ und $v = \mathrm{Im}(w)$
- Oder auch $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ und $v(z) = \mathrm{Im}(f(z))$

Spezialfall: Betrachte komplexwertige Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ mit einer reellwertigen Variablen, d.h. $I \subset \mathbb{R}$:

$$f : t \mapsto f(t) \in \mathbb{C} \quad \text{für } t \in I.$$

Beispiele:

- $f(t) = a + bt$ für $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$
- $f(t) = \exp(i\omega t)$ für $\omega \in]0, \infty[\subset \mathbb{R}$

Lineare Funktionen

Definition: (Lineare Funktion)
Eine komplexe Funktion f heißt linear, falls f für feste komplexe Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$f(z) = az + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Frage: Wie lassen sich lineare Funktionen geometrisch interpretieren?

Spezialfälle:

1. $a = 1$ (Translation): $f(z) = z + b$ für $z \in \mathbb{C}$.
2. $a \in]0, \infty[$, $b = 0$ (Skalierung): Falls $a > 1$, so wird z gestreckt, sonst gestaucht: $f(z) = az$.
3. $|a| = 1$, $b = 0$ (Rotation): $f(z) = az = z\exp(i\alpha)$, wobei $a = \exp(i\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi[$.
4. $0 \neq a \in \mathbb{C}$, $b = 0$ (Drehstreckung): $f(z) = az$ ist Komposition aus Rotation und Skalierung. Falls $a = |a|\exp(i\alpha)$, so bewirkt f Rotation um $alpha \in [0, 2\pi[$ und Skalierung um $|a|$.

2

Allgemeiner Fall (Folgerung aus Spezialfällen):
Für $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a|\exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition $f = f_T \circ f_S \circ f_R$ von drei Abbildungen schreiben:

- $f_R(z) = \exp(i\alpha)z$ einer Drehung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi[$,
- $f_S(z) = |a|z$ einer Skalierung um den Skalierungsfaktor $|a| > 0$,
- $f_T(z) = z + b$ einer Translation um den Vektor b.

Bemerkung: Drehung f_R und Streckung f_S kommutieren, d.h. lassen sich vertauschen. Es gilt

$$f_S \circ f_R = f_R \circ f_S,$$

oder

$$f_T \circ f_S \circ f_R = f_T \circ f_R \circ f_S.$$

Definition: (Lineare Funktion)
Eine komplexe Funktion f heißt linear, falls f für feste komplexe Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$f(z) = az + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Frage: Wie lassen sich lineare Funktionen geometrisch interpretieren?

Spezialfälle:

1. $a = 1$ (Translation): $f(z) = z + b$ für $z \in \mathbb{C}$.
2. $a \in]0, \infty[$, $b = 0$ (Skalierung): Falls $a > 1$, so wird z gestreckt, sonst gestaucht: $f(z) = az$.
3. $|a| = 1$, $b = 0$ (Rotation): $f(z) = az = z \exp(i\alpha)$, wobei $a = \exp(i\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi[$.
4. $0 \neq a \in \mathbb{C}$, $b = 0$ (Drehstreckung): $f(z) = az$ ist Komposition aus Rotation und Skalierung. Falls $a = |a| \exp(i\alpha)$, so bewirkt f Rotation um $alpha \in [0, 2\pi[$ und Skalierung um $|a|$.

2

Allgemeiner Fall (Folgerung aus Spezialfällen):
Für $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha) z + b$$

als Komposition $f = f_T \circ f_S \circ f_R$ von drei Abbildungen schreiben:

- $f_R(z) = \exp(i\alpha) z$ einer Drehung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi[$,
- $f_S(z) = |a| z$ einer Skalierung um den Skalierungsfaktor $|a| > 0$,
- $f_T(z) = z + b$ einer Translation um den Vektor b.

Bemerkung: Drehung f_R und Streckung f_S kommutieren, d.h. lassen sich vertauschen. Es gilt

$$f_S \circ f_R = f_R \circ f_S,$$

oder

$$f_T \circ f_S \circ f_R = f_T \circ f_R \circ f_S.$$

Quadratische Funktionen

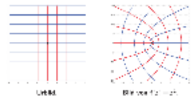
Definition: (Quadratische Funktion)
Eine komplexe Funktion f heißt quadratisch, falls f für feste komplexe Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$ eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$f(z) = az^2 + bz + c \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Bemerkung: (Geometrisches Verhalten)
Idee: Betrachte zunächst für $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$ die Bilder der achsenparallelen Geraden unter f.
Setze $w = z^2$, $z = x + iy$, $w = u + iv$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} w = u + iv = z^2 \quad &= \quad (x - iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \\ \Rightarrow \quad u = x^2 - y^2 \quad &\text{und} \quad v = 2xy. \end{aligned}$$

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$.



Allgemeine quadratische Funktionen:
Für $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$ lässt sich jede quadratische Funktion

$$f(z) = az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c$$

als Komposition $f = f_{T_2} \circ f_R \circ f_Q \circ f_{T_1}$ von vier Abbildungen schreiben:

- $f_{T_1}(z) = z + \frac{b}{2a}$ einer Translation,
- $f_Q(z) = z^2$ einer quadratischen Funktion,
- $f_R(z) = az$ einer Drehstreckung,
- $f_{T_2}(z) = z - \frac{b^2}{4a^2} + c$ einer weiteren Translation.

Funktionen

Definition: (Quadratische Funktion)
Eine komplexe Funktion f heißt quadratisch, falls f für feste komplexe Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$ eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$f(z) = az^2 + bz + c \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

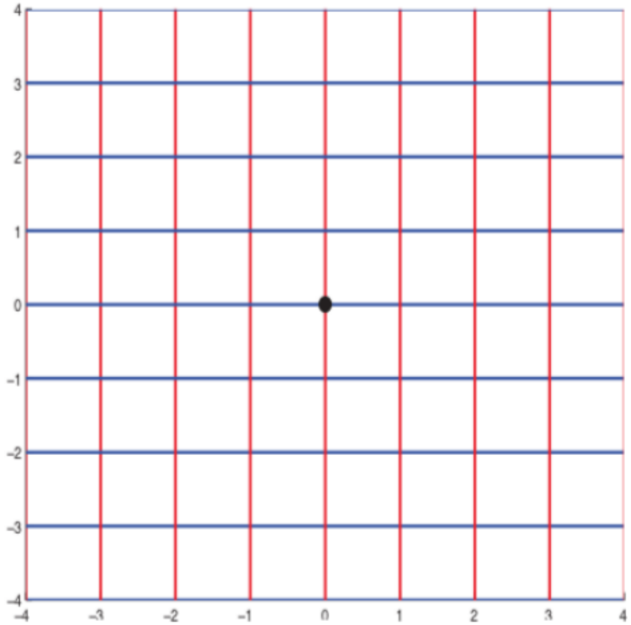
Bemerkung: (Geometrisches Verhalten)
Idee: Betrachte zunächst für $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$ die Bilder der achsenparallelen Geraden unter f.
Setze $w = z^2$, $z = x + iy$, $w = u + iv$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} w = u + iv = z^2 \quad &= \quad (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \\ \Rightarrow \quad u = x^2 - y^2 \quad &\text{und} \quad v = 2xy. \end{aligned}$$

3

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$.



Urbild.

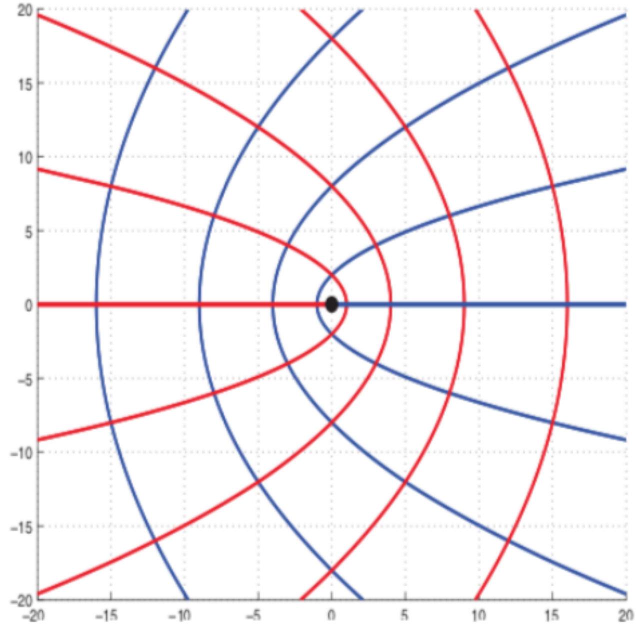


Bild von $f(z) = z^2$.

Allgemeine quadratische Funktionen:
Für $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$ lässt sich jede quadratische Funktion

$$f(z) = az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c$$

als Komposition $f = f_{T_2} \circ f_R \circ f_Q \circ f_{T_1}$ von vier Abbildungen schreiben:

- $f_{T_1}(z) = z + \frac{b}{2a}$ einer Translation,
- $f_Q(z) = z^2$ einer quadratischen Funktion,
- $f_R(z) = az$ einer Drehstreckung,
- $f_{T_2}(z) = z - \frac{b^2}{4a^2} + c$ einer weiteren Translation.

Exponential-Funktion

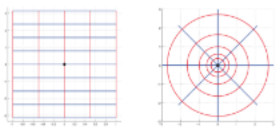
Definition: (Exponentialfunktion)
Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert:

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \quad z = x + iy..$$

Bemerkung: Es gilt das Additionstheorem $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.



Urbild. **Bild von** $f(z) = \exp(z)$.

Geometrische Interpretation:

Für $w = \exp(z)$, $z = x + iy$ und $w = u + iv$ bekommen wir

$$w = u + iv = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

und somit

$$u = e^x\cos(y) \qquad \text{und} \qquad v = e^x\sin(y).$$

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.

Für das Bild einer zur y-Achse parallelen Geraden $x = x_0$ bekommt man

$$u = e^{x_0}\cos(y) \qquad \text{und} \qquad v = e^{x_0}\sin(y)$$

- Für festes x_0 ergibt dies einen Kreis um Null mit Radius e^{x_0}.
- **Beachte:** Der Nullpunkt liegt nicht im Bild der Exponentialfunktion, d.h. es gibt kein Argument $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$. Somit gilt $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- **Beobachtung:** Die Exponentialfunktion bildet Rechteckgitter im kartesischen Koordinatensystem auf Netz von Kurven ab, die sich rechtwinklig schneiden.
- **Genauer:** Kurven, die sich im kartesischen Koordinatensystem rechtwinklig schneiden, werden unter der Exponentialfunktion exp auf Kurven abgebildet, die sich ebenso (im jeweiligen Schnittpunkt) rechtwinklig schneiden.
- **Noch allgemeiner:** Die Exponentialfunktion ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ winkeltreu (bzw. konform). Genauere Details dazu später.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.

Für das Bild einer zur x-Achse parallelen Geraden $y \equiv y_0$ bekommt man somit

$$u = e^x\cos(y_0)$$
$$v = e^x\sin(y_0)$$

- Für festes y_0 ergibt dies ein vom Ursprung ausgehenden Strahl, der mit der positiven x-Achse den Winkel y_0 einschließt.
- Für Winkel y_0 und y_1, die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, d.h.

$$y_1 = y_0 + 2\pi k \qquad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

  ergibt sich der gleiche Strahl.
- Genauer: Wegen der Periodizität von $\exp(z)$ gilt

$$e^{z+2\pi i k} = e^z e^{2\pi i k} = e^z(\cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)) = e^z \cdot 1 = e^z,$$

  d.h. zwei Punkte mit gleichen Realteilen, deren Imaginärteile sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, werden auf den gleichen Punkt abgebildet.

Definition: (Exponentialfunktion)
Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert:

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \quad z = x + iy..$$

Bemerkung: Es gilt das Additionstheorem $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Geometrische Interpretation:

Für $w = \exp(z)$, $z = x + iy$ und $w = u + iv$ bekommen wir

$$w = u + iv = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

und somit

$$u = e^x \cos(y) \qquad \text{und} \qquad v = e^x \sin(y).$$

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.

Für das Bild einer zur x-Achse parallelen Geraden $y \equiv y_0$ bekommt man somit

$$\begin{aligned} u &= e^x \cos(y_0) \\ v &= e^x \sin(y_0) \end{aligned}$$

- Für festes y_0 ergibt dies ein vom Ursprung ausgehenden Strahl, der mit der positiven x-Achse den Winkel y_0 einschließt.
- Für Winkel y_0 und y_1, die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, d.h.

  $$y_1 = y_0 + 2\pi k \qquad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

  ergibt sich der gleiche Strahl.
- Genauer: Wegen der Periodizität von $\exp(z)$ gilt

  $$e^{z+2\pi i k} = e^z e^{2\pi i k} = e^z(\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k)) = e^z \cdot 1 = e^z.$$

  d.h. zwei Punkte mit gleichen Realteilen, deren Imaginärteile sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, werden auf den gleichen Punkt abgebildet.

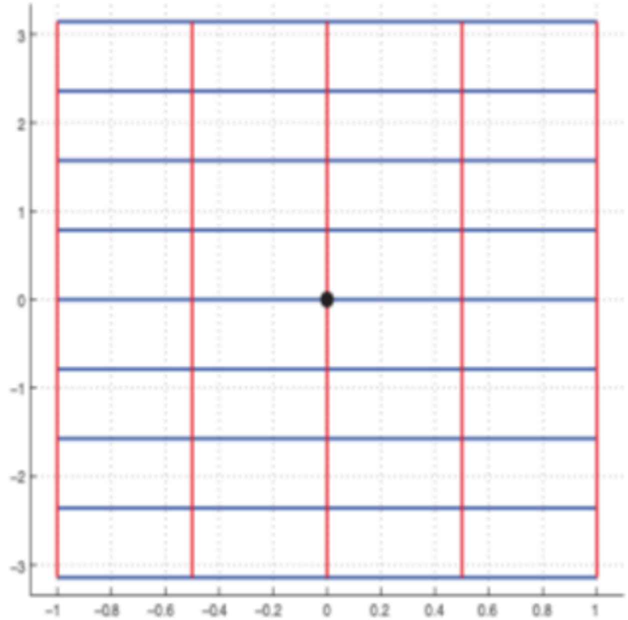
Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.

Für das Bild einer zur y-Achse parallelen Geraden $x \equiv x_0$ bekommt man

$$u = e^{x_0} \cos(y) \qquad \text{und} \qquad v = e^{x_0} \sin(y)$$

- Für festes x_0 ergibt dies einen Kreis um Null mit Radius e^{x_0}.
- **Beachte:** Der Nullpunkt liegt nicht im Bild der Exponentialfunktion, d.h. es gibt kein Argument $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$. Somit gilt $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- **Beobachtung:** Die Exponentialfunktion bildet Rechtecksgitter im kartesischen Koordinatensystem auf Netz von Kurven ab, die sich rechtwinklig schneiden.
- **Genauer:** Kurven, die sich im kartesischen Koordinatensystem rechtwinklig schneiden, werden unter der Exponentialfunktion exp auf Kurven abgebildet, die sich ebenso (im jeweiligen Schnittpunkt) rechtwinklig schneiden.
- **Noch allgemeiner:** Die Exponentialfunktion ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ `winkeltreu` (bzw. `konform`). Genauere Details dazu später.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.



Urbild.

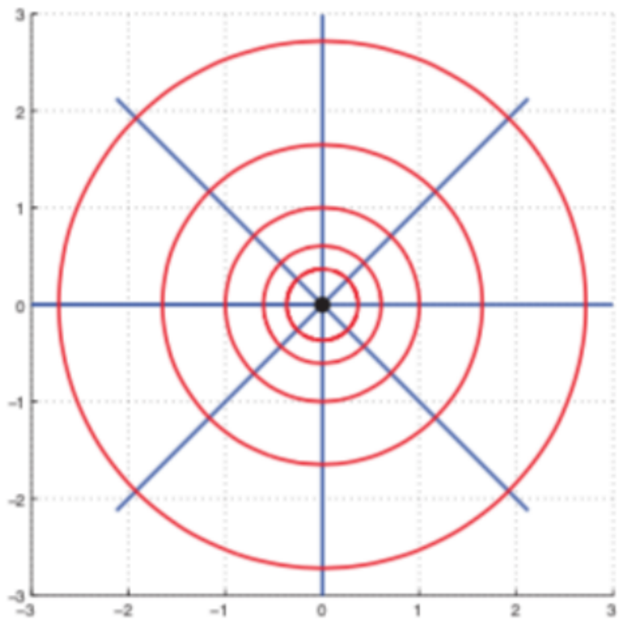


Bild von $\mathrm{f}(z) = \exp(z)$.

Umkehr-Funktion

Definition: (Injektive Funktion)
Eine komplexe Funktion $f(z)$ heißt eineindeutig (injektiv), falls es zu jedem Punkt $w \in \mathbb{C}$ ihres Werftenbereiches genau einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ ihres Definitionsbereiches gibt, so dass $f(z) = w$.

Bemerkungen:

- Injektive Funktionen nehmen jeden Wert ihres Wertebereiches genau einmal an.
- Injektive Funktionen heißen auch schlicht.

Beispiele:

- $f(z) = az + b,\ a \neq 0$ — injektiv
- $f(z) = z^2$ — nicht injektiv, da $f(z) = f(-z)$
- $f(z) = \exp(z)$ — nicht injektiv, da $\exp(z) = \exp(z + 2\pi i k)$

Einschränkung des Definitionsbereichs.

Bemerkung: Eine nicht injektive Funktion wird ggf. durch eine geeignete Einschränkung ihres Definitionsbereichs injektiv.

Beispiel: Betrachte die quadratische Funktion

$$f(z) = z^2 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \mathrm{Re}(z) > 0$$

auf der `rechten Halbebene` $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Hier ist f injektiv.

Weiterhin ist in diesem Fall der Bildbereich gegeben durch die `aufgeschnittene komplexe Ebene`

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \mathrm{Re}(z) > 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \,|\, z \leq 0\} \end{aligned}$$

Definition: (Umkehrfunktion)
Sei f eine (komplexe) injektive Funktion mit Definitionsbereich $D(f)$ und Wertebereich $W(f)$.
Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ zu f definiert durch die Abbildung, welche jedem $w \in W(f)$ den (eindeutigen) Punkt $z \in D(f)$ zuordnet, d.h. es gilt

$$f^{-1}(w) = z.$$

Anders ausgedrückt gilt für alle $z \in D(f)$ und $w \in W(f)$:

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(z) &= z, \\ (f \circ f^{-1})(w) &= w. \end{aligned}$$

Umkehrfunktion der n-ten Potenz.

Beispiel: Die Potenzfunktion

$$f(z) = z^n \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 2$$

ist für den Definitionsbereich

$$D(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n} \right\}$$

injektiv. Für den Wertebereich bekommt man in diesem Fall $W(f) = \mathbb{C}^-$.

Für die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n} \qquad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right).$$

Definition: (Injektive Funktion)
Eine komplexe Funktion $f(z)$ heißt eineindeutig (injektiv), falls es zu jedem Punkt $w \in \mathbb{C}$ ihres Werftenbereiches genau einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ ihres Definitionsbereiches gibt, so dass $f(z) = w$.

Bemerkungen:

- Injektive Funktionen nehmen jeden Wert ihres Wertebereiches genau einmal an.
- Injektive Funktionen heißen auch schlicht.

Beispiele:

• $f(z) = az + b$, $a \neq 0$	• injektiv
• $f(z) = z^2$	• nicht injektiv, da $f(z) = f(-z)$
• $f(z) = \exp(z)$	• nicht injektiv, da $\exp(z) = \exp(z + 2\pi ik)$

Einschränkung des Definitionsbereichs.

Bemerkung: Eine nicht injektive Funktion wird ggf. durch eine geeignete Einschränkung ihres Definitionsbereichs injektiv.

Beispiel: Betrachte die quadratische Funktion

$$f(z) = z^2 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \mathrm{Re}(z) > 0$$

auf der `rechten Halbebene` $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Hier ist f injektiv.

Weiterhin ist in diesem Fall der Bildbereich gegeben durch die `aufgeschnittene komplexe Ebene`

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \mathrm{Re}(z) > 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \,|\, z \leq 0\} \end{aligned}$$

Definition: (Umkehrfunktion)
Sei f eine (komplexe) injektive Funktion mit Definitionsbereich $D(f)$ und Wertebereich $W(f)$.
Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ zu f definiert durch die Abbildung, welche jedem $w \in W(f)$ den (eindeutigen) Punkt $z \in D(f)$ zuordnet, d.h. es gilt

$$f^{-1}(w) = z.$$

Anders ausgedrückt gilt für alle $z \in D(f)$ und $w \in W(f)$:

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(z) &= z, \\ (f \circ f^{-1})(w) &= w. \end{aligned}$$

Beispiel: Für den Definitionsbereich

$$D(f) = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0 \text{ und } -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$$

existiert die Umkehrfunktion f^{-1} von $f(z) = z^2$ mit Wertebereich $W(f) = \mathbb{C}^-$.
Für den Hauptwert der Wurzel $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \qquad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Beispiel: Für den Definitionsbereich

$$D(f) = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0 \text{ und } -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$$

existiert die Umkehrfunktion f^{-1} von $f(z) = z^2$ mit Wertebereich $W(f) = \mathbb{C}^-$.

Für den Hauptwert der Wurzel $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \qquad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Umkehrfunktion der n-ten Potenz.

Beispiel: Die Potenzfunktion

$$f(z) = z^n \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 2$$

ist für den Definitionsbereich

$$D(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n} \right\}$$

injektiv. Für den Wertebereich bekommt man in diesem Fall $W(f) = \mathbb{C}^-$.

Für die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n} \qquad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right).$$

Lineare Funktionen

Definition und Beispiele

Komplexe Funktionen

Quadratische Funktionen

Infos zum Kurs

Umkehr-Funktion

Exponential-Funktion