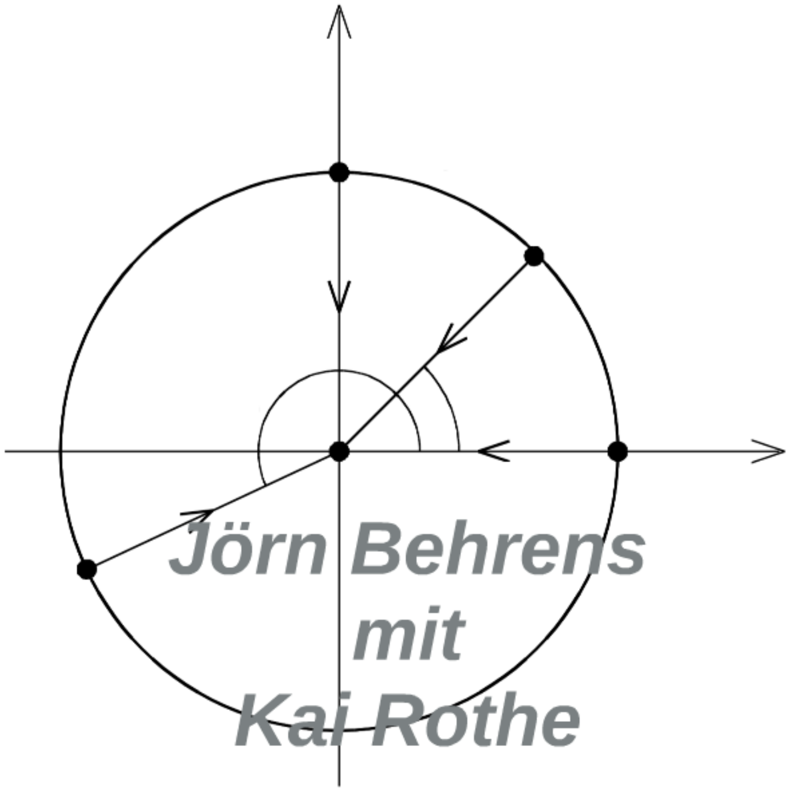
Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Logarithmus und Joukowski-Funktion

Erinnerung

Definition: (Lineare Funktion)
Eine komplexe Funktion f heißt linear, falls f für feste komplexe Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$f(z) = az + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Definition: (Quadratische Funktion)
Eine komplexe Funktion f heißt quadratisch, falls f für feste komplexe Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$ eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$f(z) = az^2 + bz + c \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Definition: (Exponentialfunktion)
Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert:

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \quad z = x + iy..$$

Bemerkung: Es gilt das Additionstheorem ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Definition: (Umkehrfunktion)
Sei f eine (komplexe) injektive Funktion mit Definitionsbereich $D(f)$ und Wertebereich $W(f)$.
Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ zu f definiert durch die Abbildung, welche jedem $w \in W(f)$ den (eindeutigen) Punkt $z \in D(f)$ zuordnet, d.h. es gilt

$$f^{-1}(w) = z.$$

Anders ausgedrückt gilt für alle $z \in D(f)$ und $w \in W(f)$:

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(z) &= z, \\ (f \circ f^{-1})(w) &= w. \end{aligned}$$

Definition: (Lineare Funktion)
Eine komplexe Funktion f heißt linear, falls f für feste komplexe Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$f(z) = az + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Definition: (Quadratische Funktion)
Eine komplexe Funktion f heißt quadratisch, falls f für feste komplexe Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$ eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$f(z) = az^2 + bz + c \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Definition: (Exponentialfunktion)
Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert:

Definition: (Exponentialfunktion)
Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert:

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \quad z = x + iy..$$

Bemerkung: Es gilt das Additionstheorem $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Definition: (Umkehrfunktion)
Sei f eine (komplexe) injektive Funktion mit Definitionsbereich $D(f)$ und Werte-

Definition: (Umkehrfunktion)
Sei f eine (komplexe) injektive Funktion mit Definitionsbereich $D(f)$ und Wertebereich $W(f)$.
Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ zu f definiert durch die Abbildung, welche jedem $w \in W(f)$ den (eindeutigen) Punkt $z \in D(f)$ zuordnet, d.h. es gilt

$$f^{-1}(w) = z.$$

Anders ausgedrückt gilt für alle $z \in D(f)$ und $w \in W(f)$:

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(z) &= z, \\ (f \circ f^{-1})(w) &= w. \end{aligned}$$

Komplexer Logarithmus

Ziel: Finde Umkehrfunktion der komplexen Exponentialfunktion

$$f(z) = \exp(z).$$

Vorüberlegungen:

- Die Exponentialfunktion ist für alle $z \in \mathbb{C}$ erklärt und es gilt

$$D(\exp) = \mathbb{C} \quad \text{und} \quad W(\exp) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

- Aber exp ist nicht injektiv auf $\mathbb{C}$.
- Schränke $D(\exp)$ geeignet ein, damit $\exp^{-1}$ konstruiert werden kann.

Frage: Sei $z = x + iy \in W(\exp)$; welche Werte $w = u + iv$ sind geeignet, so dass

$$\exp(w) = e^w = z?$$

1

Komplexer Logarithmus: Sei $z = x + iy \in W(\exp)$, $w = u + iv$.

- Die komplexen Zahlen $w = \log(|z|) + i(\arg(z) + 2\pi k)$ $(z \in \mathbb{Z})$ sind Lösungen von $e^w = z$ und heißen Logarithmus von z.
- Die Menge $\{\mathrm{Log}(z)\} := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$ bezeichnet den mengenwertigen komplexen Logarithmus von z.

Hauptwert des Logarithmus:

- Die Exponentialfunktion ist auf dem Streifen $S = \{w \in \mathbb{C} : -\pi y \mathrm{Im}(w) y \pi\}$ injektiv.
- Der zugehörige Wertebereich ist $\mathbb{C}^-$.
- Der einzige Wert von $\{\mathrm{Log}(z)\}$, der zu S gehört ist

$$w = \log(|z|) + i\arg(z) \quad -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Dieser Wert heißt Hauptwert des Logarithmus von z (schreibe $\mathrm{Log}(z)$).

Bemerkungen:

- Der Hauptwert ist nur in der aufgeschnittenen komplexen Ebene $\mathbb{C}^-$ definiert.
- Auf der negativen reellen Achse und bei $z = 0$ ist $\mathrm{Log}(z)$ nicht erklärt.
- Auf der positiven reellen Achse ist $\mathrm{Log}(x) = \log(x)$.

Ziel: Finde Umkehrfunktion der komplexen Exponentialfunktion

$$f(z) = \exp(z).$$

Vorüberlegungen:

- Die Exponentialfunktion ist für alle $z \in \mathbb{C}$ erklärt und es gilt

$$D(\exp) = \mathbb{C} \quad \text{und} \quad W(\exp) = \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

- Aber $\exp$ ist nicht injektiv auf $\mathbb{C}$.
- Schränke $D(\exp)$ geeignet ein, damit $\exp^{-1}$ konstruiert werden kann.

Frage: Sei $z = x + iy \in W(\exp)$; welche Werte $w = u + iv$ sind geeignet, so dass

$$\exp(w) = e^w = z?$$

Frage: Sei $z = x + iy \in W(\exp)$; welche Werte $w = u + iv$ sind geeignet, so dass

$$\exp(w) = e^w = z?$$

Komplexer Logarithmus: Sei $z = x + iy \in W(\exp)$, $w = u + iv$.

- Die komplexen Zahlen $w = \log(|z|) + i(\arg(z) + 2\pi k)$ $(z \in \mathbb{Z})$ sind Lösungen von $e^w = z$ und heißen Logarithmus von z.
- Die Menge $\{\mathrm{Log}(z)\} := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$ bezeichnet den mengenwertigen komplexen Logarithmus von z.

Hauptwert des Logarithmus:

- Die Exponentialfunktion ist auf dem Streifen $S = \{w \in \mathbb{C} : -\pi y \mathrm{Im}(w) y \pi\}$ injektiv.

Hauptwert des Logarithmus:

- Die Exponentialfunktion ist auf dem Streifen $S = \{w \in \mathbb{C} : -\pi y \mathrm{Im}(w) y \pi\}$ injektiv.
- Der zugehörige Wertebereich ist $\mathbb{C}^-$.
- Der einzige Wert von $\{\mathrm{Log}(z)\}$, der zu S gehört ist

$$w = \log(|z|) + i\arg(z) \quad -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Dieser Wert heißt Hauptwert des Logarithmus von z (schreibe $\mathrm{Log}(z)$).

Bemerkungen:

- Der Hauptwert ist nur in der aufgeschnittenen komplexen Ebene $\mathbb{C}^-$ definiert.
- Auf der negativen reellen Achse und bei $z = 0$ ist $\mathrm{Log}(x)$ nicht erklärt.
- Auf der positiven reellen Achse ist $\mathrm{Log}(x) = \log(x)$.

Allgemeine Potenz

Definition: *Für $a, b \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\{a^b\}$ die Menge der komplexen Zahlen*

$$e^{b\{\mathrm{Log}(a)\}} \qquad \text{für } a \neq 0$$

wobei $\{\mathrm{Log}(a)\} = \{\log(|a|) + i(\arg(a) + 2\pi k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. *Somit gilt*

$$\{a^b\} = \left\{e^{b(\log(|a|) + i(\alpha + 2\pi k))} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

wobei $\alpha = \arg(a)$. *Liegt* a *in der aufgeschnittenen komplexen Ebene,* $a \in \mathbb{C}^-$, *so enthält die Menge* $\{a^b\}$ *den Wert*

$$e^{b\,\mathrm{Log}(a)} = e^{b(\log(|a|) + i\alpha)} \qquad \text{mit } \alpha = \arg(a) \in (-\pi, \pi).$$

Dieser Wert heißt der `Hauptwert` *von* $\{a^b\}$. 2

Die aus der reellen Analysis bekannte Funktionalgleichung

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \text{für alle } a, b > 0$$

gilt für Hauptwerte des komplexen Logarithmus im Allgemeinen nicht, d.h. es gibt $a, b \in \mathbb{C}^-$ mit

$$\mathrm{Log}(ab) \neq \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(b),$$

Beispiel: Für $a = i$ und $b = -1 + i$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(i) + \mathrm{Log}(-1+i) &= i\frac{\pi}{2} + \log(\sqrt{2}) + i\frac{3}{4}\pi = \log(\sqrt{2}) + i\frac{5}{4}\pi \\ &\neq \log(\sqrt{2}) - i\frac{3}{4}\pi = \mathrm{Log}(-1-i) = \mathrm{Log}(i(-1+i)). \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\text{Hauptwert von } \{a^b\} \cdot \text{Hauptwert von } \{a^c\} = \text{Hauptwert von } \{a^{b+c}\}.$$

Beweis: Mit $\alpha := \arg(a) \in (-\pi, \pi)$ ist

$$A := e^{b(\log(|a|) + i\alpha)}$$

der Hauptwert von $\{a^b\} = \left\{e^{b(\log(|a|) + i(\alpha + 2\pi k))}\right\}$. Genauso ist

$$B := e^{c(\log(|a|) + i\alpha)}$$

der Hauptwert von $\{a^c\}$ und

$$C := e^{(b+c)(\log(|a|) + i\alpha)}$$

der Hauptwert von $\{a^{b+c}\}$.

Schließlich gilt

$$A \cdot B = e^{b(\log(|a|) + i\alpha)} \cdot e^{c(\log(|a|) + i\alpha)} = e^{(b+c)(\log(|a|) + i\alpha)} = C.$$

Definition: *Für* $a, b \in \mathbb{C}$ *bezeichnet* $\{a^b\}$ *die Menge der komplexen Zahlen*

$$e^{b\{\mathrm{Log}(a)\}} \qquad \text{für } a \neq 0$$

wobei $\{\mathrm{Log}(a)\} = \{\log(|a|) + i(\arg(a) + 2\pi k) \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. *Somit gilt*

$$\{a^b\} = \left\{ e^{b[\log(|a|)+i(\alpha+2\pi k)]} \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

wobei $\alpha = \arg(a)$. *Liegt* a *in der aufgeschnittenen komplexen Ebene,* $a \in \mathbb{C}^-$, *so enthält die Menge* $\{a^b\}$ *den Wert*

$$e^{b\,\mathrm{Log}(a)} = e^{b(\log(|a|)+i\alpha)} \qquad \text{mit } \alpha = \arg(a) \in (-\pi, \pi).$$

Dieser Wert heißt der Hauptwert *von* $\{a^b\}$. 2

Es gilt:

Die aus der reellen Analysis bekannte Funktionalgleichung

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \text{für alle } a, b > 0$$

gilt für Hauptwerte des komplexen Logarithmus im Allgemeinen nicht, d.h. es gibt $a, b \in \mathbb{C}^-$ mit

$$\mathrm{Log}(ab) \neq \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(b),$$

Beispiel: Für $a = i$ und $b = -1 + i$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(i) + \mathrm{Log}(-1+i) &= i\frac{\pi}{2} + \log(\sqrt{2}) + i\frac{3}{4}\pi = \log(\sqrt{2}) + i\frac{5}{4}\pi \\ &\neq \log(\sqrt{2}) - i\frac{3}{4}\pi = \mathrm{Log}(-1-i) = \mathrm{Log}(i(-1+i)). \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\text{Hauptwert von } \{a^b\} \cdot \text{Hauptwert von } \{a^c\} = \text{Hauptwert von } \{a^{b+c}\}.$$

Beweis: Mit $\alpha := \arg(a) \in (-\pi, \pi)$ ist

$$A := e^{b\,[\log(|a|)+i\alpha]}$$

der Hauptwert von $\{a^b\} = \left\{e^{b\,[\log(|a|)+i(\alpha+2\pi k)]}\right\}$. Genauso ist

$$B := e^{c\,[\log(|a|)+i\alpha]}$$

der Hauptwert von $\{a^c\}$ und

$$C := e^{(b+c)\,[\log(|a|)+i\alpha]}$$

der Hauptwert von $\{a^{b+c}\}$.

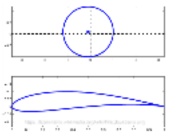
Schließlich gilt

$$A \cdot B = e^{b\,[\log(|a|)+i\alpha]} \cdot e^{c\,[\log(|a|)+i\alpha]} = e^{(b+c)\,[\log(|a|)+i\alpha]} = C.$$

Joukowski-Funktion

Bemerkungen:

- Benannt nach Nikolai Jegorowitsch Shukowski (1847-1921)
- Formel wurde von Martin Wilhelm Jutta (1867-1944) unabhängig entdeckt
- Wurde zur Berechnung von (laminaren) Strömungen um Tragflächen verwendet



Definition: (Joukowski-Funktion)
Die Joukowski-Funktion ist definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

für $0 \neq z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung: Es gilt die Symmetrie

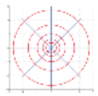
$$f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Ziel: Analysiere das geometrische Verhalten der Joukowski-Funktion.

Bestimme dazu für

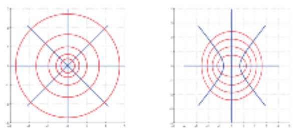
$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

die Bilder der Kreise $|z| \equiv$ const und der Strahlen $\arg(z) \equiv$ const.



3

Darstellung der Joukowski-Funktion



$$z \mapsto f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Bemerkungen:

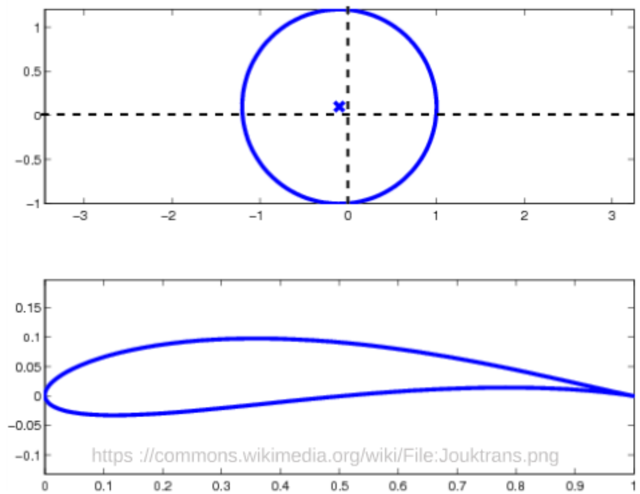
- Joukowski-Funktion bildet Polarkoordinaten-Netz auf Netz von Ellipsen und Hyperbeln ab.
- Joukowski-Funktion ist winkeltreu (rechte Winkel bleiben recht).
- Nicht injektiv, da gilt: $z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm 1, 0\} \Rightarrow z \neq \frac{1}{z}$, aber $f(z) = f(\frac{1}{z})$.
- Joukowski-Funktion ist injektiv auf den folgenden Einschränkungen von $D(f)$:
    1. Komplement des Einheitskreises: $D(f) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,
    2. Obere Halbebene: $D(f) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
- Umkehrfunktion der Joukowski-Funktion: Löse resultierende quadratische Funktion

  $$w^2 - 2zw + 1 = 0$$

  nach w im jeweiligen Definitionsbereich auf, erhalte $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$.

Bemerkungen:

- Benannt nach Nikolai Jegorowitsch Shukowski (1847-1921)
- Formel wurde von Martin Wilhelm Jutta (1867-1944) unabhängig entdeckt
- Wurde zur Berechnung von (laminaren) Strömungen um Tragflächen verwendet



Ziel: Analysiere das geometrische Verhalten der Joukowski-Funktion.

Definition: (Joukowski-Funktion)
Die Joukowski-Funktion ist definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

für $0 \neq z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung: Es gilt die Symmetrie

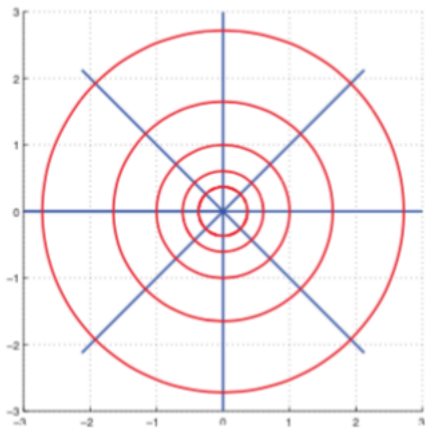
$$f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Ziel: Analysiere das geometrische Verhalten der Joukowski-Funktion.

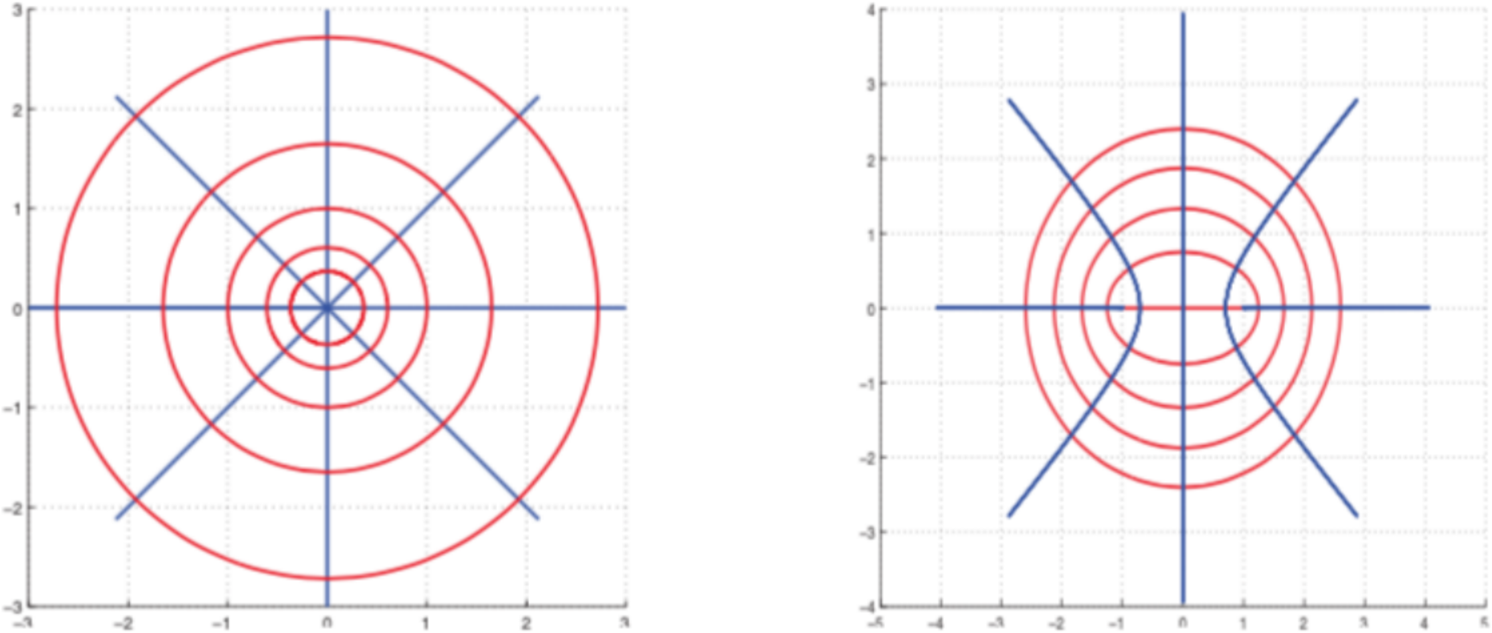
Bestimme dazu für

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

die Bilder der Kreise $|z| \equiv$ const und der Strahlen $\arg(z) \equiv$ const.



Darstellung der Joukowski-Funktion



$$z \mapsto f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Bemerkungen:

- Joukowski-Funktion bildet Polarkoordinaten-Netz auf Netz von Ellipsen und Hyperbeln ab.
- Joukowski-Funktion ist winkeltreu (rechte Winkel bleiben recht).
- Nicht injektiv, da gilt: $z \in \mathbb{C} \backslash \{\pm 1, 0\} \Rightarrow z \neq \frac{1}{z}$, aber $f(z) = f(\frac{1}{z})$.
- Joukowski-Funktion ist injektiv auf den folgenden Einschränkungen von $D(f)$:
  1. Komplement des Einheitskreises: $D(f) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,
  2. Obere Halbebene: $D(f) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
- Umkehrfunktion der Joukowski-Funktion: Löse resultierende quadratische Funktion
  $$w^2 - 2zw + 1 = 0$$
  nach w im jeweiligen Definitionsbereich auf, erhalte $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$.

Komplexe Trigonometrische Funktionen

Erinnerung: (Eulersche Formel) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}$$

Daraus folgt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned}$$

Definition: (Komplexe Trigonometrische Funktionen)
Für $z \in \mathbb{C}$ definiere

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{aligned}$$

Rechenregeln für trigonometrische Funktionen.

Es gilt

$$\begin{aligned} \cos(z+2\pi) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{iz}e^{2\pi i} + e^{-iz}e^{-2\pi i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\ &= \cos(z) \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Analog zeigt man

$$\sin(z+2\pi) = \sin(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Fazit: Die komplexen trigonometrischen Funktionen sin und cos sind (genauso wie die reellen trigonometrischen Funktionen) periodisch mit Periode 2π.

Weitere Rechenregeln.

Symmetrie.

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \cos(-z) && \text{für alle } z \in \mathbb{C} \\ \sin(z) &= -\sin(-z) && \text{für alle } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Phasenverschiebung.

$$\begin{aligned} \sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(z+\pi/2)} - e^{-i(z+\pi/2)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}e^{i\pi/2} - e^{-iz}e^{-i\pi/2}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \cos(z) \end{aligned}$$

Zerlegung der Eins.

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Additionstheoreme.

$$\begin{aligned} \cos(z_1+z_2) &= \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) && \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \sin(z_1+z_2) &= \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2) && \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Erinnerung: (Eulersche Formel) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}$$

Daraus folgt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned}$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Definition: (Komplexe Trigonometrische Funktionen)
Für $z \in \mathbb{C}$ definiere

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{aligned}$$

Rechenregeln für trigonometrische Funktionen.

Es gilt

$$\begin{aligned} \cos(z+2\pi) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{iz}e^{2\pi i} + e^{-iz}e^{-2\pi i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\ &= \cos(z) \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Analog zeigt man

$$\sin(z+2\pi) = \sin(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Fazit: Die komplexen trigonometrischen Funktionen sin und cos sind (genauso wie die reellen trigonometrischen Funktionen) periodisch mit Periode 2π.

Weitere Rechenregeln.

Symmetrie.

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \cos(-z) && \text{für alle } z \in \mathbb{C} \\ \sin(z) &= -\sin(-z) && \text{für alle } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Phasenverschiebung.

$$\begin{aligned} \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}(z+\pi/2)} - e^{-\mathrm{i}(z+\pi/2)}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z}e^{\mathrm{i}\pi/2} - e^{-\mathrm{i}z}e^{-\mathrm{i}\pi/2}\right) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{i}e^{\mathrm{i}z} - (-\mathrm{i})e^{-\mathrm{i}z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}\right) = \cos(z) \end{aligned}$$

Zerlegung der Eins.

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Additionstheoreme.

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) && \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2) && \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Allgemeine Potenz

Joukowski-Funktion

Komplexer Logarithmus

Komplexe Funktionen

Komplexe Trigonometrische Funktionen

Erinnerung