Komplexe Funktionen

30.04.2018

J. Behrens

① Beweis Satz über Kreistreue der Möbius-Trafo

- Möbius-Trafo: $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ad \neq bc$
- Fall a) : $c=0$: in diesem Fall ist T linear und daher kreistreu.
- Fall b) : $c \neq 0$: Zerlege T :

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}$$

Idee: Zeige dann, dass $f(z) = \frac{1}{z}$ kreistreu ist.

Denn $T(z)$ ist Komposition aus (dann) kreistreuen Abbildungen.

- Wende (kreistreue) stereographische Projektion an auf $w = \frac{1}{z}$:

Es gilt $X = P^{-1}(z) = \left(\dfrac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \dfrac{z-\bar{z}}{i(1+z\bar{z})}, \dfrac{z\bar{z}-1}{1+z\bar{z}} \right)^T \in S^2$

Dann folgt für $w = \frac{1}{z}$ unter P^{-1}:

$$x' = F(x) = P^{-1}(\bar{z})$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{\bar z} + \frac{1}{\bar{\bar z}}}{1 + (\frac{1}{\bar z})(\frac{1}{\bar{\bar z}})}, \frac{\frac{1}{\bar z} - \frac{1}{\bar{\bar z}}}{i(1 + (\frac{1}{\bar z})(\frac{1}{\bar{\bar z}}))}, \frac{(\frac{1}{\bar z})(\frac{1}{\bar{\bar z}}) - 1}{1 + (\frac{1}{\bar z})(\frac{1}{\bar{\bar z}})} \right)^T$$

$$= \left(\frac{z + \bar z}{1 + z\bar z}, -\frac{z - \bar z}{i(1 + z\bar z)}, -\frac{z\bar z - 1}{1 + z\bar z} \right)^T = (x_1, -x_2, -x_3)^T$$

D.h. $F(x)$ beschreibt eine Drehung um die x_1-Achse um den Winkel π.

$\Rightarrow$ $F(x)$ ist offensichtlich kreistreu.

Damit ist aber auch die Komposition

$$f(z) = P \circ F \circ P^{-1} \text{ kreistreu.} \qquad \boxtimes$$

② Beispiel:

- gesucht: Möbius-Trafo $w = T(z)$: $|z| = 2 \to |w+1| = 1$ mit $T(-2) = 0$ und $T(0) = i$

- Ansatz: $z_2 = 0$, $z_3 = \infty$ liegen symmetrisch zu $|z| = 2$

$\Rightarrow$ $w_2 = i$ $w_3 = T(\infty)$ liegen symmetrisch zu $|w+1| = 1$

$\Rightarrow$ $(w_2 + 1)\overline{(w_3 + 1)} = 1$

$\Rightarrow$ $w_3 = \frac{1}{2}(-1 + i)$

- Dreipunkte formel:

$$\frac{w-0}{w-i} : \frac{w_3-0}{w_3-i} = \frac{z+2}{z-0} : \frac{z_3+2}{z_3-0} \Bigg|_{z_3 \to \infty}$$

$$\Rightarrow \quad w = T(z) = -\frac{z+2}{(1+i)z+2i}$$