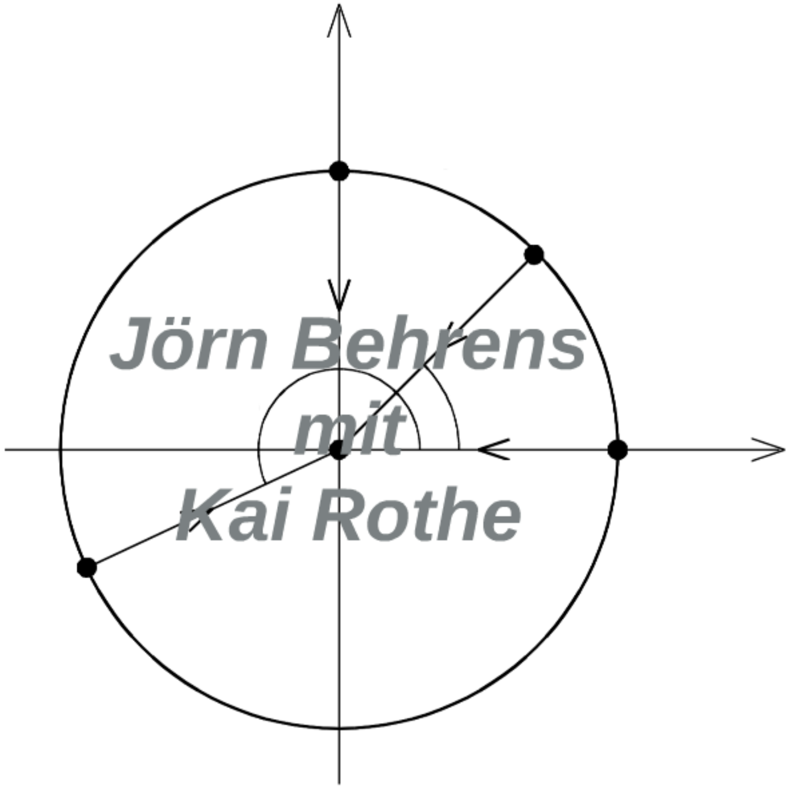
Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Komplexe Differenzierbarkeit

Vorbemerkungen

Ziel: Ableitungen komplexer Funktionen.

Dazu: Fragen

- Wie kann man *Grenzwerte* sinnvoll definieren?
- Was bedeutet *Stetigkeit* einer komplexen Funktion?

Ansatz: Sei $f(z) : D \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion:

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad u, v : D \to \mathbb{R}.$$

Sei weiter $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplexe Zahl, so dass

$$f(z) \equiv f(x, y), \quad u(z) \equiv u(x, y), \quad v(z) \equiv v(x, y).$$

Bemerkungen: (totale reelle Differentiale)

- Sei $z_0 = x_0 + iy_0$ fester Punkt in $D(f)$ (Definitionsbereich).
- Es gebe (offene) Umgebung $U(z_0)$ um z_0, in der die reellen Funktionen u, v jeweils stetige Ableitungen nach x und y haben. Also sind die partiellen Ableitungen stetig:

$$u_x, u_y, v_x, v_y \text{ stetig um } (x_0, y_0).$$

- Dann existieren die (totalen) Differentiale du und dv in (x_0, y_0).
- Mit $dx = x - x_0$ und $dy = y - y_0$ gilt:

$$\begin{aligned} du &= u_x(x_0, y_0)dx + u_y(x_0, y_0)dy \\ dv &= v_x(x_0, y_0)dx + v_y(x_0, y_0)dy \end{aligned}$$

Ziel: Ableitungen komplexer Funktionen.

Dazu: Fragen

- Wie kann man *Grenzwerte* sinnvoll definieren?
- Was bedeutet *Stetigkeit* einer komplexen Funktion?

Ansatz: Sei $f(z) : D \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion:

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad u, v : D \to \mathbb{R}.$$

Sei weiter $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplexe Zahl, so dass

$$f(z) \equiv f(x, y), \quad u(z) \equiv u(x, y), \quad v(z) \equiv v(x, y).$$

Bemerkungen: (totale reelle Differentiale)

- Sei $z_0 = x_0 + iv_0$ fester Punkt in $D(f)$ (Definitionsbereich).
- Es gebe (offene) Umgebung $U(z_0)$ um z_0, in der die reellen Funktionen u, v jeweils stetige Ableitungen nach x und y haben. Also sind die partiellen Ableitungen stetig:

$$u_x, u_y, v_x, v_y \text{ stetig um } (x_0, y_0).$$

- Dann existieren die (totalen) Differentiale du und dv in (x_0, y_0).
- Mit $dx = x - x_0$ und $dy = y - y_0$ gilt:

$$\begin{aligned} du &= u_x(x_0, y_0)dx + u_y(x_0, y_0)dy \\ dv &= v_x(x_0, y_0)dx + v_y(x_0, y_0)dy \end{aligned}$$

Differentiale und komlexe Differenzierbarkeit

Definition: (Differential)
Das Differential der Funktion $f = u + iv$ im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ ist definiert als die (in dx und dy) lineare Funktion

$$df = du + idv.$$

Bemerkung:
Das Differential $df = du + idv$ der Funktion $f = u + iv$ in z_0 hat die Form

$$df = [u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)]dx + [u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)]dy.$$

1

Bemerkung: (partielle Ableitungen)
Für das Differential df der Funktion f in z_0 gilt

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

mit

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) &= u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

f_x und f_y sind die Partiellen Ableitungen von f.

Bemerkung: Die Funktion $f = u + iv$ ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

erfüllen.

Definition: (komplex differenzierbar)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in z_0, falls

$$df = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0))dz,$$

d.h. falls $B = 0$.

2

Bemerkung: [illegible]

- Ziel: [illegible]
- Schreibe [illegible]
- [illegible]
- Damit [illegible]
- Weiter gilt
  $$df = Adz + Bd\bar{z},$$
  mit [illegible]
- [illegible]

Definition: (Differential)
Das Differential der Funktion $f = u + iv$ im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ ist definiert als die (in dx und dy) lineare Funktion

$$df = du + idv.$$

Bemerkung:
Das Differential $df = du + idv$ der Funktion $f = u + iv$ in z_0 hat die Form

$$df = [u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)]dx + [u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)]dy.$$

Bemerkung:

Bemerkung: (partielle Ableitungen)
Für das Differential df der Funktion f in z_0 gilt

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

mit

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) &= u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

f_x und f_y sind die Partiellen Ableitungen von f.

Bemerkung: (Herleitung dz)

- Ziel: Stelle df in Abhängigkeit von dz dar (statt dx und dy).
- Schreibe:

$$dz = z - z_0 = (x + iy) - (x_0 + iy_0) = dx + idy.$$

- Es gilt:

$$\overline{dz} = \overline{z - z_0} = dx - idy.$$

- Damit erhalte:

$$dx = \frac{1}{2}(dz + \overline{dz}) \quad \text{und} \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - \overline{dz}).$$

- Weiter gilt

$$df = Adz + B\overline{dz},$$

mit $A = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0))$ und $B = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0))$.

- Schließlich erhalte:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - df}{dz} = 0.$$

Definition: (komplex differenzierbar)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in z_0, falls

$$df = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - i f_y(z_0))dz,$$

d.h. falls $B = 0$.

2

Bemerkung: Die Funktion $f = u + iv$ ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

erfüllen.

Ableitungen

Beobachtung: Falls f in z_0 komplex differenzierbar, so gilt

$$df = A\,dz \qquad \text{mit } A = (f_x(z_0) - if_y(z_0))/2$$

und daher gilt für den *komplexen Zuwachs* $dz = \ell$

$$f(z_0 + \ell) - f(z_0) = A\ell + \Phi(\ell)$$

mit

$$\lim_{\ell \to 0} \frac{\Phi(\ell)}{\ell} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\ell \to 0} \frac{f(z_0 + \ell) - f(z_0)}{\ell} = A.$$

Definition: *Der Grenzwert*

$$\lim_{\ell \to 0} \frac{f(z_0 + \ell) - f(z_0)}{\ell}$$

heißt die `Ableitung` *von f in z_0, kurz*

$$f'(z_0), \quad \frac{df}{dz}(z_0), \quad Df(z_0)$$

Bemerkung: Weiterhin folgt (aus der bisherigen Diskussion) die Beziehung

$$df = f'(z_0)\,dz$$

falls f in z_0 komplex differenzierbar. Schließlich gilt

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0).$$

Bemerkungen:

- Ableitungen einer komplexen Funktion werden (wie im Reellen) unter Verwendung von *Differenzenquotienten* gebildet.
- Aus der komplexen Differenzierbarkeit folgt die Existenz einer Ableitung.
- Umgekehrt folgt aus der Existenz einer Ableitung die Differenzierbarkeit.

Beweis (Ableitung → Diff'barkeit)
Aus der Existenz einer Ableitung in z_0 folgt

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(z_0) \quad \text{und}$$
$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{ih} = \frac{1}{i} f_y(z_0)$$

Und mit $f_x(z_0) = -if_y(z_0)$ gilt $B = 0$.

Satz: *Sei $f = u + iv$ eine komplexe Funktion mit Definitionsbereich $D(f)$. Weiterhin sei $z_0 \in D(f)$, so dass u, v in einer Umgebung von z_0 stetig partiell nach x, y differenzierbar sind. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) f ist komplex differenzierbar in z_0;

(b) u und v genügen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;

(c) Die Ableitung von f existiert in z_0.

Beobachtung: Falls f in z_0 komplex differenzierbar, so gilt

$$\mathrm{d}f = A\,\mathrm{d}z \qquad \text{mit } A = (f_x(z_0) - i f_y(z_0))/2$$

und daher gilt für den *komplexen Zuwachs* $\mathrm{d}z = \ell$

$$f(z_0 + \ell) - f(z_0) = A\ell + \Phi(\ell)$$

mit

$$\lim_{\ell \to 0} \frac{\Phi(\ell)}{\ell} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\ell \to 0} \frac{f(z_0 + \ell) - f(z_0)}{\ell} = A.$$

Definition: *Der Grenzwert*

$$\lim_{\ell \to 0} \frac{f(z_0 + \ell) - f(z_0)}{\ell}$$

heißt die `Ableitung` *von* f *in* z_0, *kurz*

$$f'(z_0), \quad \frac{df}{dz}(z_0), \quad Df(z_0)$$

Bemerkungen:

- Ableitungen einer komplexen Funktion werden (wie im Reellen) unter Verwendung von *Differenzenquotienten* gebildet.
- Aus der komplexen Differenzierbarkeit folgt die Existenz einer Ableitung.
- Umgekehrt folgt aus der Existenz einer Ableitung die Differenzierbarkeit.

Beweis: (Ableitung $\Rightarrow$ Diff'barkeit)
Aus der Existenz einer Ableitung in z_0 folgt

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = f_x(z_0) \quad \text{und} \\ f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{ih} = \frac{1}{i} f_y(z_0) \end{aligned}$$

Und mit $f_x(z_0)0 - if_y(z_0)$ gilt $B = 0$.

Satz: *Sei* $f = u + iv$ *eine komplexe Funktion mit Definitionsbereich* $D(f)$. *Weiterhin sei* $z_0 \in D(f)$, *so dass* u, v *in einer Umgebung von* z_0 *stetig partiell nach* x, y *differenzierbar sind. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) f *ist komplex differenzierbar in* z_0*;*

(b) u *und* v *genügen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;*

(c) Die Ableitung von f *existiert in* z_0.

Bemerkung: Weiterhin folgt (aus der bisherigen Diskussion) die Beziehung

$$df = f'(z_0)\,dz$$

falls f in z_0 komplex differenzierbar. Schließlich gilt

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0).$$

3

Analytische Funktionen

Definition: (Gebiet in $\mathbb{C}$)
Ein Gebiet ist eine zusammenhängende offene Punktmenge in $\mathbb{C}$.

Beispiele: Die folgenden Punktmengen komplexer Zahlen sind Gebiete.

- die komplexe Ebene $\mathbb{C}$;
- die aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}^-$;
- die komplexe Ebene ohne die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$;
- die offene Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$;
- ein Kreisring ohne Rand, z.B. $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 3 < |z| < 7\}$.

Aber:
Eine Kreisscheibe mit Rand ist kein Gebiet, eine solche Menge ist nicht offen.

Definition: *Eine komplexe Funktion $f(z)$, $z \in D(f)$, heißt* `analytisch` *(bzw.* `holomorph`*), falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

- $D(f)$ *ist ein Gebiet;*
- f *ist in jedem Punkt* $z \in D(f)$ *komplex differenzierbar.*

Bemerkung: Die obige zweite Bedingung ist jeweils äquivalent zu den beiden folgenden Bedingungen.

- Real- und Imaginärteil von f genügen in jedem Punkt $z \in D(f)$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;
- die Funktion f besitzt in jedem Punkt $z \in D(f)$ eine Ableitung.

Bemerkung: Eine analytische Funktion ist in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig.

Satz: (Umkehrung analytischer Funktionen)
Betrachte eine bijektive analytische Funktion $f : D(f) \to W(f)$ mit Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$.
Die Umkehrfunktion f^{-1} einer analytischen Funktion f ist analytisch und es gilt:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

bzw.

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))} \quad \forall w_0 \in D(f^{-1}) = W(f).$$

Satz: *Die Funktionen f und g seien analytisch in einem Gebiet G. Dann sind die Funktionen $f + g$ und fg ebenfalls analytisch in G. Gilt $g(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, so ist weiterhin f/g analytisch in G. Es gelten die folgenden Differentiationsregeln.*

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

Satz: (Kettenregel)
Betrachte zwei analytische Funktionen $g : D(g) \to W(g)$ und $f : D(f) \to W(f)$ mit $W(g) \subset D(f)$.
Die Komposition $f \circ g$ zweier analytischer Funktionen f und g mit $W(g) \subset D(f)$ ist analytisch und es gilt die Kettenregel

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

bzw.

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0) \quad \forall z_0 \in D(f \circ g) = D(g).$$

Definition: *Eine Funktion, die in der komplexen Ebene analytisch ist, heißt* `ganze Funktion`

Bemerkung: Jedes komplexe Polynom

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

ist eine ganze Funktion.

Denn: Konstanten $f_c(z) \equiv c \in \mathbb{C}$ sind ganz mit $f_c'(z) \equiv 0$. Weiterhin ist die Identität $g(z) = z$ ganz mit $g'(z) = 1$. Da sich jedes Polynom $p(z)$ als Komposition von Funktionen f_c und g schreiben lässt, ist $p(z)$ ganz mit

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}.$$

Definition: (Gebiet in $\mathbb{C}$)
Ein Gebiet ist eine zusammenhängende offene Punktmenge in $\mathbb{C}$.

Beispiele: Die folgenden Punktmengen komplexer Zahlen sind Gebiete.

- die komplexe Ebene $\mathbb{C}$;
- die aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}^-$;
- die komplexe Ebene ohne die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$;
- die offene Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$;
- ein Kreisring ohne Rand, z.B. $\{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z| < 7\}$.

Aber:
Eine Kreisscheibe mit Rand ist kein Gebiet, eine solche Menge ist nicht offen.

Definition: *Eine komplexe Funktion* $f(z)$, $z \in D(f)$, *heißt* `analytisch` *(bzw.* `holomorph`*), falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

- $D(f)$ *ist ein Gebiet;*
- f *ist in jedem Punkt* $z \in D(f)$ *komplex differenzierbar.*

Bemerkung: Die obige zweite Bedingung ist jeweils äquivalent zu den beiden folgenden Bedingungen.

- Real- und Imaginärteil von f genügen in jedem Punkt $z \in D(f)$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;
- die Funktion f besitzt in jedem Punkt $z \in D(f)$ eine Ableitung.

Bemerkung: Eine analytische Funktion ist in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig.

Satz: *Die Funktionen* f *und* g *seien analytisch in einem Gebiet* G. *Dann sind die Funktionen* $f + g$ *und* fg *ebenfalls analytisch in* G. *Gilt* $g(z) \neq 0$ *für alle* $z \in G$, *so ist weiterhin* f/g *analytisch in* G. *Es gelten die folgenden Differentiationsregeln.*

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

Definition: *Eine Funktion, die in der komplexen Ebene analytisch ist, heißt* `ganze Funktion`

Bemerkung: Jedes komplexe Polynom

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

ist eine ganze Funktion.

Denn: Konstanten $f_c(z) \equiv c \in \mathbb{C}$ sind ganz mit $f_c'(z) \equiv 0$. Weiterhin ist die Identität $g(z) = z$ ganz mit $g'(z) = 1$. Da sich jedes Polynom $p(z)$ als Komposition von Funktionen f_c und g schreiben lässt, ist $p(z)$ ganz mit

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}.$$

Satz: (Kettenregel)
Betrachte zwei analytische Funktionen $g : D(g) \to W(g)$ und $f : D(f) \to W(f)$ mit $W(g) \subset D(f)$.
Die Komposition $f \circ g$ zweier analytischer Funktionen f und g mit $W(g) \subset D(f)$ ist analytisch und es gilt die Kettenregel

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

bzw.

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0) \quad \forall z_0 \in D(f \circ g) = D(g).$$

Satz: (Umkehrung analytischer Funktionen)
Betrachte eine objektive analytische Funktion $f : D(f) \to W(f)$ mit Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$.
Die Umkehrfunktion f^{-1} einer analytischen Funktion f ist analytisch und es gilt:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

bzw.

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1})(w_0)} \quad \forall w_0 \in D(f^{-1}) = W(f).$$

4

Geometrie der komplexen Ableitung

Wir hatten gesehen:

- Ableitungen einer komplexen Funktion werden (wie im Reellen) unter Verwendung von *Differenzenquotienten* gebildet.
- Aus der komplexen Differenzierbarkeit folgt die Existenz einer Ableitung.
- Umgekehrt folgt aus der Existenz einer Ableitung die Differenzierbarkeit.

Frage: wie lässt sich die Ableitung geometrisch interpretieren?

Definition. (konforme Abbildung)
Eine Abbildung $f : D(f) \to W(f)$, unter der die Winkel (und deren Orientierung) erhalten bleiben, heißt: winkeltreu bzw. konform.

Satz: Eine analytische Funktion $f : D(f) \to W(f)$ ist in jedem Punkt $z_0 \in D(f)$ mit $f'(z_0) \neq 0$ konform.

Satz: (Umkehrung)
Sei $f : D(f) \to W(f)$ in $z_0 \in D(f)$ konform mit $f = u + iv$. Weiter seien u und v in Umgebung von z_0 stetig diff'bar. Dann ist f komplex diff'bar mit $f'(z_0) \neq 0$.

Vorbemerkungen:

- Sei $f : D(f) \to W(f)$ analytische Funktion und $z_0 \in D(f)$.
- Sei Γ eine Kurve, die z_0 enthält, d.h. $z_0 = \Gamma(t_0)$ ($t_0 \in [\alpha, \beta]$), wobei
$$\Gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) : t \in [\alpha, beta]\} \subset D(f).$$
- Seien $x(t)$ und $y(t)$ in t_0 differenzierbar, also auch $z(t)$ in t_0 mit
$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$
- Im Folgenden sei $z'(t_0) \neq 0$ vorausgesetzt.

Geometrische Interpretationen:

- Tangentenvektor Γ^*: Drehung von Γ um Winkel ω.
- Drehwinkel ω hängt von f und z_0 ab (nicht von Γ)
- Der Tangentenvektor *jeder* Kurve durch z_0 wird durch f um den Winkel $\omega = \arg(f'(z_0))$ gedreht.

Frage: Wie verhält sich die Kurve Γ unter der Abbildung f?

- Betrachte das Bild
$$\Gamma^* = \{w(t) = f(z(t)) : t \in [\alpha, \beta]\},$$
mit $w(t_0) = f(z(t_0))$ oder kurz $w_0 = f(z_0)$.

Beobachtung. (Tangentenvektor)
Der Tangentenvektor $w'(t)$ von Γ^* ab w_0 berechnet sich nach der Kettenregel:
$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0).$$
Für $f'(z_0) \neq 0$ gilt:
$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0)).$$
bzw. $\alpha^* = \alpha + \omega$, für
$$\alpha^* = \arg(w'(t_0)), \quad \alpha = \arg(z'(t_0)), \quad \omega = \arg(f'(z_0)).$$

Wir hatten gesehen:

- Ableitungen einer komplexen Funktion werden (wie im Reellen) unter Verwendung von *Differenzenquotienten* gebildet.
- Aus der komplexen Differenzierbarkeit folgt die Existenz einer Ableitung.
- Umgekehrt folgt aus der Existenz einer Ableitung die Differenzierbarkeit.

Frage: wie lässt sich die Ableitung geometrisch interpretieren?

Vorbemerkungen:

- Sei $f : D(f) \to W(f)$ analytische Funktion und $z_0 \in D(f)$.
- Sei Γ eine Kurve, die z_0 enthält, d.h. $z_0 = \Gamma(t_0)$ $(t_0 \in [\alpha, \beta])$, wobei

$$\Gamma = \{z(t) = x(t), iy(t) : t \in [\alpha, beta]\} \subset D(f).$$

- Seien $x(t)$ und $y(t)$ in t_0 differenzierbar, also auch $z(t)$ in t_0 mit

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

- Im Folgenden sei $z'(t_0) \neq 0$ vorausgesetzt.

Frage: Wie verhält sich die Kurve Γ unter der Abbildung f?

- Betrachte das Bild

$$\Gamma^* = \{w(t) = f(z(t)) : t \in [\alpha, \beta]\},$$

mit $w(t_0) = f(z(t_0))$ oder kurz $w_0 = f(z_0)$.

Beobachtung: (Tangentenvektor)
Der Tangentenvektor $w'(t)$ von Γ^* ub w_0 berechnet sich nach der Kettenregel:

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0).$$

Für $f'(z_0) \neq 0$ gilt

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0)),$$

bzw. $\alpha^* = \alpha + \omega$, für

$$\alpha^* = \arg(w'(t_0)), \quad \alpha = \arg(z'(t_0)), \quad \omega = \arg(f'(z_0)).$$

Geometrische Interpretationen:

- Tangentenvektor Γ^*: Drehung von Γ um Winkel ω.
- Drehwinkel ω hängt von f und z_0 ab (nicht von Γ).
- Der Tangentenvektor *jeder* Kurve durch z_0 wird durch f um den Winkel $\omega = \arg(f'(z_0))$ gedreht.

Definition: (konforme Abbildung)
Eine Abbildung $f : D(f) \to W(f)$, unter der alle Winkel (und deren Orientierung) erhalten bleiben, heißt winkeltreu bzw. konform.

Satz: Eine analytische Funktion $f : D(f) \to W(f)$ ist
in jedem Punkt $z_0 \in D(f)$ mit $f'(z_0) \neq 0$ konform.

Satz: (Umkehrung)
Sei $f : D(f) \to W(f)$ in $z_0 \in D(f)$ konform mit $f = u + iv$. Weiter seien u und v in Umgebung von z_0 stetig diff'bar. Dann ist f komplex diff'bar mit $f'(z_0) \neq 0$.

Ableitungen

Analytische Funktionen

Differentiale und komlexe Differenzierbarkeit

Komplexe Funktionen

Geometrie der komplexen Ableitung

Vorbemerkungen