Komplexe Funktionen

07.05.2018

J. Behrens

① partielle Ableitung in $\mathbb{C}$:

- Ziel: stelle die Koeffizienten von df durch partielle Ableitungen dar.

- $$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h,y_0) + i\,v(x_0+h,y_0) - u(x_0,y_0) - i\,v(x_0,y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h,y_0) - u(x_0,y_0) + i\,[v(x_0+h,y_0) - v(x_0,y_0)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h,y_0) - u(x_0,y_0)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h,y_0) - v(x_0,y_0)}{h}$$

$$= u_x(x_0,y_0) + i\,v_x(x_0,y_0)$$

- Analog: $f_y(x_0,y_0) = u_y(x_0,y_0) + i\,v_y(x_0,y_0)$

- Insgesamt: $df = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy$

② Cauchy-Riemannsche DGLn:

- Falls $f: D \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in D$ komplex diff'bar, so gilt

$$f_x(z_0) + i f_y(z_0) = 0 \qquad (B=0)$$

- Es folgt:

$$u_x(z_0) + i v_x(z_0) + i\left[u_y(z_0) + i v_y(z_0)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_x(z) - v_y(z_0) + i\left[u_y(z_0) + v_x(z_0)\right] = 0$$

- Trenne in Real- und Imaginärteil:

$$\underbrace{u_x = v_y \qquad \text{und} \qquad u_y = -v_x}_{\text{Cauchy-Riemannschen DGLn}}$$

③ Beispiele komplexer Ableitungen:

- Sei $f(z) = z^2$
- Es gilt: $f(x,y) = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$
- Für die partiellen Ableitungen gilt:

$$f_x(x,y) = 2x + 2iy \qquad f_y(x,y) = -2y + 2ix = i f_x(x,y)$$

- Für jedes $z = z_0$ gilt: $B = 0$ und $A = 2z_0$

$$\Rightarrow \quad df = 2z_0\, dz.$$

- Also ist f in z_0 komplex diff'bar mit $f'(z_0) = 2z_0$ $(z_0 \in \mathbb{C})$.

- Auch möglich: (direkt)

$$\frac{f(z_0+l)-f(z_0)}{l} = \frac{(z_0+l)^2 - z_0^2}{l} = \frac{2z_0 l + l^2}{l} = 2z_0 + l$$

$$\longrightarrow 2z_0 \quad (\text{für } l \to 0)$$

- Sei $f(z) = \overline{z}$

- Es gilt: $f(x,y) = f(z) = \overline{z} = x - iy$

- Partielle Ableitungen: $f_x(x,y) = 1 \qquad f_y(x,y) = -i$

- Für jedes $z = z_0$ gilt:

$$A = \frac{1}{2}\left(f_x(x,y) - i f_y(x,y)\right) = 0$$

$$B = \frac{1}{2}\left(f_x(x,y) + i f_y(x,y)\right) = \frac{1 - i^2}{2} = 1$$

- Also $A = 0$, $B \neq 0$ und $df = f_x\, dx + f_y\, dy = (dx - i dy) = d\overline{z}$

- Es folgt:
  - $f(z) = \overline{z}$ ist in keinem Punkt in $\mathbb{C}$ komplex diff'bar.
  - Die Cauchy-Riemannschen DGLn sind nirgends erfüllt.
  - Die Ableitung von f existiert in keinem Punkt in $\mathbb{C}$.

④ Beispiele analytischer Umkehrfunktionen:

- $f(z) = z^2$ mit $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ rechte Halbebene
- f ist dort injektiv mit Wertebereich $\mathbb{C}^-$
- $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$ (Hauptwert der Wurzelfunktion) ist Umkehrfunktion.
- $(f^{-1})' = (\sqrt{z})' = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$ für $z \in \mathbb{C}^-$

- $f(z) = \exp(z)$ mit $z \in S = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$
- f ist dort injektiv mit Wertebereich $\mathbb{C}^-$
- $f^{-1}(z) = \operatorname{Log}(z)$ Hauptwert des Logarithmus
- $(f^{-1})' = (\operatorname{Log} z)' = \dfrac{1}{\exp(\operatorname{Log}(z))} = \dfrac{1}{z}$ für $z \in \mathbb{C}^-$.