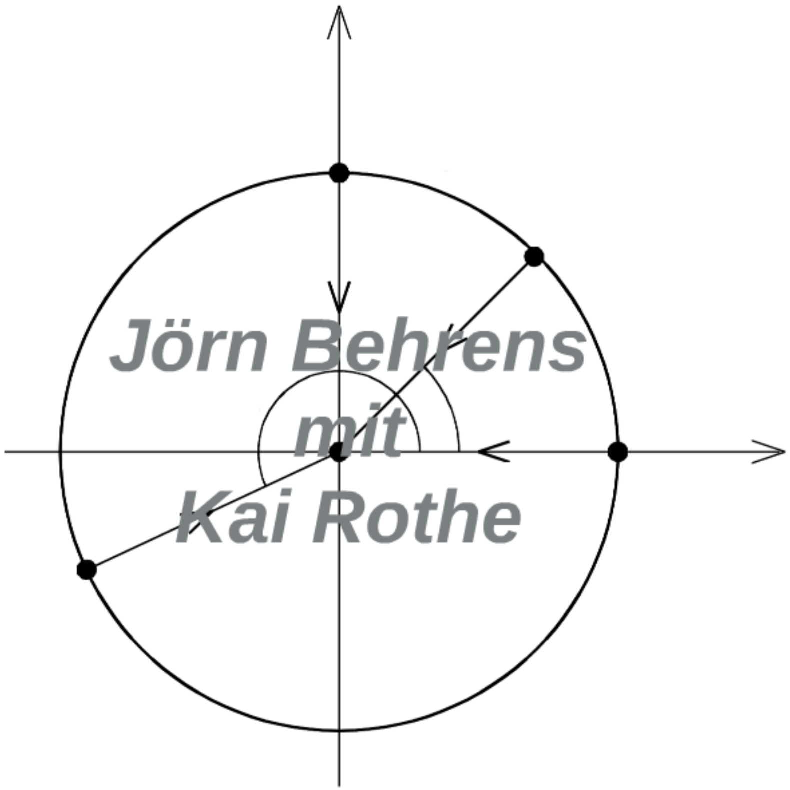
Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Ebene Potentialprobleme

Erinnerung und Motivation

Definition: (Gebiet in $\mathbb{C}$)
Ein Gebiet ist eine zusammenhängende offene Punktmenge in $\mathbb{C}$.

Beispiele: Die folgenden Punktmengen komplexer Zahlen sind Gebiete.

- die komplexe Ebene $\mathbb{C}$;
- die aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}^-$;
- die komplexe Ebene ohne die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$;
- die offene Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$;
- ein Kreisring ohne Rand, z.B. $\{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z| < 7\}$.

Definition: *Eine komplexe Funktion $f(z)$, $z \in D(f)$, heißt* `analytisch` *(bzw.* `holomorph`*), falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

- $D(f)$ *ist ein Gebiet;*
- f *ist in jedem Punkt $z \in D(f)$ komplex differenzierbar.*

Bemerkung: Die obige zweite Bedingung ist jeweils äquivalent zu den beiden folgenden Bedingungen.

- Real- und Imaginärteil von f genügen in jedem Punkt $z \in D(f)$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;
- die Funktion f besitzt in jedem Punkt $z \in D(f)$ eine Ableitung.

Definition. (konforme Abbildung)
Eine Abbildung $f : D(f) \to W(f)$, unter der alle Winkel (und deren Orientierung) erhalten bleiben, heißt winkeltreu bzw. konform.

Ziel: Lösung ebener Potentialprobleme mittels konformer Abbildungen f.
Dazu: Konstruiere konforme Transformationen.

Definition: (Gebiet in $\mathbb{C}$)
Ein Gebiet ist eine zusammenhängende offene Punktmenge in $\mathbb{C}$.

Beispiele: Die folgenden Punktmengen komplexer Zahlen sind Gebiete.

- die komplexe Ebene $\mathbb{C}$;
- die aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}^-$;
- die komplexe Ebene ohne die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$;
- die offene Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$;
- ein Kreisring ohne Rand, z.B. $\{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z| < 7\}$.

Definition: *Eine komplexe Funktion* $\mathrm{f}(z)$, $z \in \mathrm{D}(\mathrm{f})$, *heißt* `analytisch` *(bzw.* `holomorph`*), falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

- $\mathrm{D}(\mathrm{f})$ *ist ein Gebiet;*
- f *ist in jedem Punkt* $z \in \mathrm{D}(\mathrm{f})$ *komplex differenzierbar.*

Bemerkung: Die obige zweite Bedingung ist jeweils äquivalent zu den beiden folgenden Bedingungen.

- Real- und Imaginärteil von f genügen in jedem Punkt $z \in \mathrm{D}(\mathrm{f})$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;
- die Funktion f besitzt in jedem Punkt $z \in \mathrm{D}(\mathrm{f})$ eine Ableitung.

Definition: (konforme Abbildung)
Eine Abbildung $f : D(f) \to W(f)$, unter der alle Winkel (und deren Orientierung) erhalten bleiben, heißt winkeltreu bzw. konform.

Ziel: Lösung ebener Potentialprobleme mittels konformer Abbildungen f.
Dazu: Konstruiere konforme Transformationen.

Konforme Transformation

Vorbemerkungen:

- Sei $f : G \to G'$ analytisch, bijektiv, und konform (d.h. winkeltreu) für Gebiete $G, G' \subset \mathbb{C}$.
- Es existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1} : G' \to G$ mit

$$z = f^{-1}(w) \quad \text{für} \quad w = f(z),$$

  $(z = x + iy \in G$ und $w = u + iv \in G')$.

- Sei Φ reelwertige zweimal stetig diff'bare Funktion:

$$\Phi : (x, y) \mapsto \Phi(x, y) = \Phi(z) \in \mathbb{R}, \quad z \in G.$$

Definition: (konforme Transformation)
Mit obigen Voraussetzungen gibt es eine Abbildung

$$\Psi := \Phi(f^{-1}) : G' \to \mathbb{R}$$

Oder: $\Psi(x, y) : (x, y) \mapsto \Psi(x, y) = \Psi(w)_\Phi(f^{-1}(w)) \in \mathbb{R}$ für $w \in G'$.
Die so definierte Abbildung Ψ heißt konforme Transformation von Φ mit der Abbildung f.

Bemerkung: (Anwendungen)
Im folgenden werden wir Φ und Ψ als Potentiale auffassen:

- elektrostatische Potentiale,
- Strömungspotentiale,
- Temperaturfelder, etc.

Vorbemerkungen:

- Sei $f : G \to G'$ analytisch, bijektiv, und konform (d.h. winkeltreu) für Gebiete $G, G' \subset \mathbb{C}$.
- Es existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1} : G' \to G$ mit
$$z = f^{-1}(w) \quad \text{für} \quad w = f(z),$$
($z = x + iy \in G$ und $w = u + iv \in G'$).
- Sei Φ reelwertige zweimal stetig diff'bare Funktion:
$$\Phi : (x, y) \mapsto \Phi(x, y) = \Phi(z) \in \mathbb{R}, \quad z \in G.$$

Definition: (konforme Transformation)
Mit obigen Voraussetzungen gibt es eine Abbildung

$$\Psi := \Phi(f^{-1}) : G' \to \mathbb{R}$$

Oder: $\Psi(x,y) : (x,y) \mapsto \Psi(x,y) = \Psi(w)_{\Phi}(f^{-1}(w)) \in \mathbb{R}$ für $w \in G'$.
Die so definierte Abbildung Ψ heißt konforme Transformation von Φ mit der Abbildung f.

Bemerkung: (Anwendungen)
Im folgenden werden wir Φ und Ψ als Potentiale auffassen:

- elektrostatische Potentiale,
- Strömungspotentiale,
- Temperaturfelder, etc.

Komplexer Gradient

Definition: (Komplexer Gradient)
Der komplexe Gradient einer reellwertigen Funktion $\Phi : (x, y) \mapsto \Phi(x, y) \in \mathbb{R}$ ist definiert als die Funktion

$$\mathrm{grad}(\Phi(x, y)) = \Phi_x(x, y) + i\Phi_y(x, y).$$

Bemerkungen:

- Der komplexe Gradient fasst den üblichen Gradienten als komplexe Zahl auf.
- Entsprechend ist der komplexe Gradient von Ψ gegeben durch

$$\mathrm{grad}(\Psi(u, v)) = \Psi_u(u, v) + i\Psi_v(u, v).$$

Frage: Wie verhalten sich komplexe Gradienten unter konformen Transformationen?

1

Gradient

Definition: (Komplexer Gradient)
Der komplexe Gradient einer reellwertigen Funktion $\Phi : (x, y) \mapsto \Phi(x, y) \in \mathbb{R}$ ist definiert als die Funktion

$$\operatorname{grad}(\Phi(x, y)) = \Phi_x(x, y) + i\Phi_y(x, y).$$

Bemerkungen:

- Der komplexe Gradient fasst den üblichen Gradienten als komplexe Zahl auf.
- Entsprechend ist der komplexe Gradient von Ψ gegeben durch

$$\operatorname{grad}(\Psi(u, v)) = \Psi_u(u, v) + i\Psi_v(u, v).$$

$$\mathrm{grad}(\Psi(u,v)) = \Psi_u(u,v) + i\Psi_v(u,v).$$

Frage: Wie verhalten sich komplexe Gradienten unter konformen Transformationen?

1

Tranformationen komplexer Gradienten

Satz: (Erster Transformationssatz)
Geht Ψ durch Transformation mit der analytischen Abbildung f aus Φ hervor, so gilt

$$\mathrm{grad}(\Phi)(z) = \mathrm{grad}(\Psi)(w) \cdot \overline{f'(z)},$$

wobei $w = f(z)$.

Folgerung: Genügt Φ der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$, so folgt:

$$\Delta\Psi = 0$$

Beweis: Mit der Konformität von f gilt $f'(z) \neq 0$.
Aber dann folgt die Behauptung unmittelbar aus

$$\Delta_z\Phi = \Delta_w\Psi \cdot |f'(z)|^2.$$

Bemerkung: (Laplace-Operator)
Bei vielen Potentialproblemen ist die Größe

$$\Delta\Phi = \Delta_z\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy}$$

bekannt.
Frage: Wie verhält sich die Transformation Ψ unter dem Laplace-Operator?
D.h. welche Werte ergeben sich für

$$\Delta\Psi = \Delta_w\Psi = \Psi_{uu} + \Psi_{vv}$$

2

Satz: (Zweiter Transformationssatz)
Geht Ψ durch Transformation mit der analytischen Abbildung f aus Φ hervor, so gilt

$$\Delta_z\Phi = \Delta_w\Psi) \cdot |f'(z)|^2,$$

wobei $w = f(z)$.

plexer Gradie

Satz: (Erster Transformationssatz)
Geht Ψ durch Transformation mit der analytischen Abbildung f aus Φ hervor, so gilt

$$\operatorname{grad}(\Phi)(z) = \operatorname{grad}(\Psi)(w) \cdot \overline{f'(z)},$$

wobei $w = f(z)$.

Bemerkung: (Laplace Operator)

Bemerkung: (Laplace-Operator)
Bei vielen Potentialproblemen ist die Größe

$$\Delta\Phi = \Delta_z\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy}$$

bekannt.
Frage: Wie verhält sich die Transformation Ψ unter dem Laplace-Operator?
D.h. welche Werte ergeben sich für

$$\Delta\Psi = \Delta_w\Psi = \Psi_{uu} + \Psi_{vv}$$

2

Satz: (Zweiter Transformationssatz)
Geht Ψ durch Transformation mit der analytischen Abbildung f aus Φ hervor, so gilt

$$\Delta_z \Phi = \Delta_w \Psi) \cdot |f'(z)|^2,$$

wobei $w = f(z)$.

Folgerung: Genügt Φ der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$, so folgt:

$$\Delta\Psi = 0$$

Beweis: Mit der Konformität von f gilt $f'(z) \neq 0$.
Aber dann folgt die Behauptung unmittelbar aus

$$\Delta_z \Phi = \Delta_w \Psi \cdot |f'(z)|^2.$$

Harmonische Funktionen

Definition: (harmonische Funktion)
Eine Funktion f, die in einem Gebiet G der Laplace-Gleichung

$$\Delta f = 0$$

genügt, heißt harmonisch in G.

Bemerkung: Damit gilt: harmonische Funktionen gehen unter konformen Transformationen in harmonische Funktionen über.

Satz:
Sei $u = u(x, y)$ auf einem Gebiet G harmonisch, d.h. es gelte $\Delta u = 0$.
Dann gibt es eine Funktion $v = v(x, y)$, so dass die Abbildung $f = u + iv$ auf G analytisch ist.

3

Satz:
Falls $f = u + iv$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, analytisch auf einem Gebiet G ist, so gilt

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{auf } G, \\ \Delta v &= v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{auf } G, \end{aligned}$$

d.h. Real- und Imaginärteil von f sind jeweils harmonisch auf G.

Beweis:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

Analog: $\Delta v = 0$.

Definition: (harmonische Funktion)
Eine Funktion f, die in einem Gebiet G der Laplace-Gleichung

$$\Delta f = 0$$

genügt, heißt harmonisch in G.

Bemerkung: Damit gilt: harmonische Funktionen gehen unter konformen Transformationen in harmonische Funktionen über.

Satz:

Satz:
Falls $f = u + iv$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, analytisch auf einem Gebiet G ist, so gilt

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{auf } G, \\ \Delta v &= v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{auf } G, \end{aligned}$$

d.h. Real- und Imaginärteil von f sind jeweils harmonisch auf G.

Beweis:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

Analog: $\Delta v = 0$.

Satz:
Sei $u = u(x,y)$ auf einem Gebiet G harmonisch, d.h. es gelte $\Delta u = 0$.
Dann gibt es eine Funktion $v = v(x,y)$, so dass die Abbildung $f = u + iv$ auf G analytisch ist.

3

Ebene Potentialprobleme

Lösungsskizze für ebene Potentialprobleme:

- **Hilfsmittel**: Transformationssätze
- **Idee**: Verwende konforme Transformationen
- **Gegeben**: Potentialproblem in der z-Ebene
  (physikalische Ebene/physikalische Koordinaten)
- **Transformation**: Transformiere das Problem konform in die w-Ebene
  (Modellebene)
- **Vereinfachung**: Löse das Problem (leicht) in der Modellebene
- **Lösung**: Rücktransformation in die z-Ebene liefert Lösung
  (physikalische Ebene)

Beispiel: (Temperaturverteilung im Zylinder)

- **Gegeben**: Homogener Zylinder senkrecht zur z-Ebene mit (beliebigem) Querschnitt Q.
- **Annahmen**:
  - Oberflächentemperatur sei zeitunabhängig
  - Oberflächentemperatur sei konstant bei konstantem z.
- **Frage**: Wie sieht die Temperaturverteilung Φ im Inneren des Zylinders aus, wenn die Temperatur am Rand Γ mit $\Phi_0(z)$, $z \in \Gamma$ gemessen wird?
- **Modellierung**: Nach der Wärmeleitungsgleichung genügt die Temperatur Φ der Laplace-Gleichung

  $$\Delta\Phi = 0 \quad \text{in } G.$$

  Zusätzlich gelten die Dirichlet-Randbedingungen

  $$\Phi(z) = \Phi_0(z) \quad \text{für } z \in \Gamma.$$

- **Aufgabe**: Löse das obige Dirichlet-Problem.
  Wir nehmen an, das Problem ist korrekt gestellt, d.h. $\exists$ eindeutige Lösung.

4

Lösungsskizze für ebene Potentialprobleme:

- **Hilfsmittel**: Transformationssätze
- **Idee**: Verwende konforme Transformationen
- **Gegeben**: Potentialproblem in der z-Ebene
  (physikalische Ebene/physikalische Koordinaten)
- **Transformation**: Transformiere das Problem konform in die w-Ebene
  (Modellebene)
- **Vereinfachung**: Löse das Problem (leicht) in der Modellebene
- **Lösung**: Rücktransformation in die z-Ebene liefert Lösung
  (physikalische Ebene)

Beispiel: (Temperaturverteilung im Zylinder)

- **Gegeben**: Homogener Zylinder senkrecht zur z-Ebene mit (beliebigem) Querschnitt Q.
- **Annahmen**:
  - Oberflächentemperatur sei zeitunabhängig
  - Oberflächentemperatur sei konstant bei konstantem z.
- **Frage**: Wie sieht die Temperaturverteilung Φ im Inneren des Zylinders aus, wenn die Temperatur am Rand Γ mit $\Phi_0(z)$, $z \in \Gamma$ gemessen wird?
- **Modellierung**: Nach der Wärmeleitungsgleichung genügt die Temperatur Φ der Laplace-Gleichung

  $$\Delta\Phi = 0 \quad \text{in } G.$$

  Zusätzlich gelten die Dirichlet-Randbedingungen

  $$\Phi(z) = \Phi_0(z) \quad \text{für } z \in \Gamma.$$

- **Aufgabe**: Löse das obige Dirichlet-Problem.
  Wir nehmen an, das Problem ist korrekt gestellt, d.h. $\exists$ eindeutige Lösung.

4

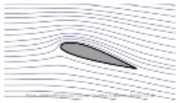
Ebene stationäre Strömung

Betrachte:

- zeitunabhängige ebene Strömungen von
- *idealen* (d.h. reibungsfeien) und *inkompressiblen* Flüssigkeiten;
- die Strömungen seien *quellenfrei* und *wirbelfrei*;
- dabei bezeichne

$$\mathbf{q}(x,y) = (q_1(x,y), q_2(x,y))$$

den Geschwindigkeitsvektor der Strömungen im Punkt (x,y).



Zusammenfassung: Das Geschwindigkeitspotential Φ einer quellen- und wirbelfreien Strömung einer idealen kompressiblen Flüssigkeit ist harmonisch, d.h. es gilt

$$\Delta\Phi = 0.$$

Umkehrung: Jede harmonische Funktion Φ, $\Delta\Phi = 0$, lässt sich als Geschwindigkeitspotential einer quellen- und wirbelfreien Strömung interpretieren.

Analysis III: Mit der Wirbelfreiheit $\mathrm{rot}(\mathbf{q}) = 0$ ist das Differential

$$q_1(x,y)\,dx - q_2(x,y)\,dy$$

integrabel, d.h. es gibt eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{q} = \mathrm{grad}(\Phi)$$

bzw.

$$q_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad q_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Beobachtung: Verwendet man die Bedingung (an die Wirbelfreiheit von $\mathbf{q}$)

$$q_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad q_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial y},$$

so gilt für die Quellenfreiheit, $\mathrm{div}(\mathbf{q}) = 0$, die Bedingung

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

Definition: *Die Funktion Φ mit $\mathbf{q} = \mathrm{grad}(\Phi)$ heißt* `Potentialströmung` *bzw. das* `Geschwindigkeitspotential` *der Strömung.*

Erinnerung: *Eine Potentialströmung ist stets wirbelfrei, denn $\mathrm{rot}(\mathbf{q}) = 0$ folgt unmittelbar aus $\mathbf{q} = \mathrm{grad}(\Phi)$.*

Strömung

Betrachte:

- zeitunabhängige ebene Strömungen von
- *idealen* (d.h. reibungsfeien) und *inkompressiblen* Flüssigkeiten;
- die Strömungen seien *quellenfrei* und *wirbelfrei*;
- dabei bezeichne

$$\mathbf{q}(x, y) = (q_1(x, y), q_2(x, y))$$

den Geschwindigkeitsvektor der Strömungen im Punkt (x, y).

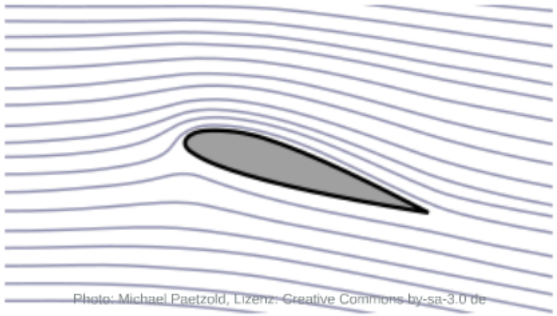


Photo: Michael Paetzold, Lizenz: Creative Commons by-sa-3.0 de

- Quellenfreiheit bedeutet

$$\mathrm{div}(\mathbf{q}) = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0.$$

- Wirbelfreiheit bedeutet

$$\mathrm{rot}(\mathbf{q}) = \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0.$$

- Quellenfreiheit bedeutet

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}) = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0.$$

- Wirbelfreiheit bedeutet

$$\operatorname{rot}(\mathbf{q}) = \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0.$$

Analysis III: Mit der Wirbelfreiheit $\operatorname{rot}(\mathbf{q}) = 0$ ist das Differential

$$q_1(x,y)\,dx + q_2(x,y)\,dy$$

`integrabel`, d.h. es gibt eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{q} = \operatorname{grad}(\Phi)$$

bzw.

$$q_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad q_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Definition: *Die Funktion* Φ *mit* $\mathbf{q} = \mathrm{grad}(\Phi)$ *heißt* `Potentialströmung` *bzw. das* `Geschwindigkeitspotential` *der Strömung.*

Erinnerung: *Eine Potentialströmung ist stets wirbelfrei, denn* $\mathrm{rot}(\mathbf{q}) = 0$ *folgt unmittelbar aus* $\mathbf{q} = \mathrm{grad}(\Phi)$.

Beobachtung: Verwendet man die Bedingung (an die Wirbelfreiheit von $\mathbf{q}$)

$$q_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad q_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

so gilt für die Quellenfreiheit, $\operatorname{div}(\mathbf{q}) = 0$, die Bedingung

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Zusammenfassung: Das Geschwindigkeitspotential Φ einer quellen- und wirbelfreien Strömung einer idealen kompressiblen Flüssigkeit ist harmonisch, d.h. es gilt

$$\Delta\Phi = 0.$$

Umkehrung: Jede harmonische Funktion Φ, $\Delta\Phi = 0$, lässt sich als Geschwindigkeitspotential einer quellen- und wirbelfreien Strömung interpretieren.

Harmonische Funktionen

Tranformationen komplexer Gradienten

Ebene Potentialprobleme

Komplexer Gradient

Konforme Transformation

Erinnerung und Motivation

Ebene stationäre Strömung