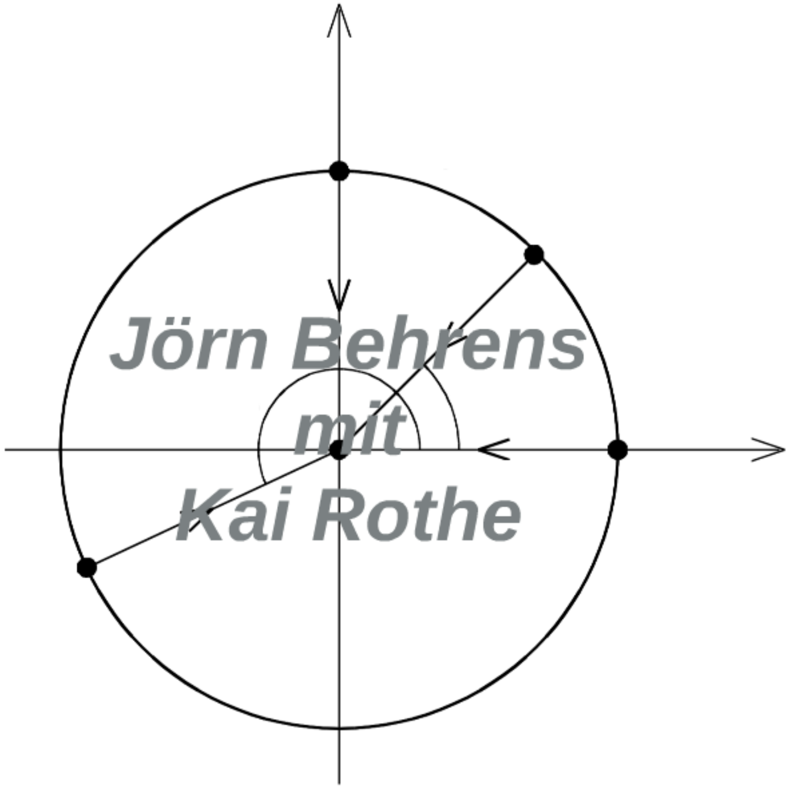
Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Weitere Anwendungen für Transformationen
Komplexe Integration

Erinnerung

Definition: (konforme Transformation)
Mit obigen Voraussetzungen gibt es eine Abbildung

$$\Psi := \Phi(f^{-1}) : G' \to \mathbb{R}$$

Oder: $\Psi(x, y) : (x, y) \mapsto \Psi(x, y) = \Psi(w)_\Phi(f^{-1}(w)) \in \mathbb{R}$ für $w \in G'$.
Die so definierte Abbildung Ψ heißt konforme Transformation von Φ mit der Abbildung f.

Satz: (Erster Transformationssatz)
Geht Ψ durch Transformation mit der analytischen Abbildung f aus Φ hervor, so gilt

$$\operatorname{grad}(\Phi)(z) = \operatorname{grad}(\Psi)(w) \cdot \overline{f'(z)},$$

wobei $w = f(z)$.

Satz: (Zweiter Transformationssatz)
Geht Ψ durch Transformation mit der analytischen Abbildung f aus Φ hervor, so gilt

$$\Delta_z \Phi = (\Delta_w \Psi) \cdot |f'(z)|^2,$$

wobei $w = f(z)$.

Definition: (harmonische Funktion)
Eine Funktion f, die in einem Gebiet G der Laplace-Gleichung

$$\Delta f = 0$$

genügt, heißt harmonisch in G.

Bemerkung: Damit gilt: harmonische Funktionen gehen unter konformen Transformationen in harmonische Funktionen über.

Lösungsskizze für ebene Potentialprobleme:

- **Hilfsmittel**: Transformationssätze
- **Idee**: Verwende konforme Transformationen
- **Gegeben**: Potentialproblem in der z-Ebene
(physikalische Ebene/physikalische Koordinaten)
- **Transformation**: Transformiere das Problem konform in die w-Ebene
(Modellebene)
- **Vereinfachung**: Löse das Problem (leicht) in der Modellebene
- **Lösung**: Rücktransformation in die z-Ebene liefert Lösung
(physikalische Ebene)

Definition: (konforme Transformation)
Mit obigen Voraussetzungen gibt es eine Abbildung

$$\Psi := \Phi(f^{-1}) : G' \to \mathbb{R}$$

Oder: $\Psi(x,y) : (x,y) \mapsto \Psi(x,y) = \Psi(w)_{\Phi}(f^{-1}(w)) \in \mathbb{R}$ für $w \in G'$.
Die so definierte Abbildung Ψ heißt konforme Transformation von Φ mit der Abbildung f.

Satz: (Erster Transformationssatz)
Geht Ψ durch Transformation mit der analytischen Abbildung f aus Φ hervor, so gilt

$$\mathrm{grad}(\Phi)(z) = \mathrm{grad}(\Psi)(w) \cdot \overline{f'(z)},$$

wobei $w = f(z)$.

Satz: (Zweiter Transformationssatz)
Geht Ψ durch Transformation mit der analytischen Abbildung f aus Φ hervor, so gilt

$$\Delta_z \Phi = (\Delta_w \Psi) \cdot |f'(z)|^2,$$

wobei $w = f(z)$.

Definition: (harmonische Funktion)
Eine Funktion f, die in einem Gebiet G der Laplace-Gleichung

$$\Delta f = 0$$

genügt, heißt harmonisch in G.

Bemerkung: Damit gilt: harmonische Funktionen gehen unter konformen Transformationen in harmonische Funktionen über.

Lösungsskizze für ebene Potentialprobleme:

- **Hilfsmittel**: Transformationssätze
- **Idee**: Verwende konforme Transformationen
- **Gegeben**: Potentialproblem in der z-Ebene
  (physikalische Ebene/physikalische Koordinaten)
- **Transformation**: Transformiere das Problem konform in die w-Ebene
  (Modellebene)
- **Vereinfachung**: Löse das Problem (leicht) in der Modellebene
- **Lösung**: Rücktransformation in die z-Ebene liefert Lösung
  (physikalische Ebene)

Neumannsches Randwertproblem

Erinnerung:

- **Voraussetzung:** Sei Ψ_0 hinreichend glatt, und durch

$$\Psi_0(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt, mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi_0(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta.$$

- Dann kann die Lösung des Dirichlet-Problems direkt angegeben werden mit

$$\Psi(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^{|n|} e^{in\theta} \qquad \text{für } w = \rho e^{i\theta} \text{ mit } 0 \le \rho \le 1.$$

- **Rücktransformation:** Die Lösung des ursprünglichen Problems ist somit

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n |f(z)|^{|n|} e^{in\phi} \qquad \text{mit } \phi = \arg(f(z)).$$

Voraussetzungen:

- Sei Γ der Rand des durchströmten Gebiets G (begrenzende Wand);
- die Strömung verläuft dann tangential zum Rand Γ, d.h.
- der Geschwindigkeitsvektor $\mathrm{grad}(\Phi)$ ist der Tangentenvektor von Γ;
- dann verschwindet die `Normalenableitung` von Φ längs Γ.
- Dies führt insgesamt zu dem `Neumannschen Randwertproblem`

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi) &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \end{aligned}$$

das mit der Methode der konformen Transformation gelöst werden kann.

Lösungsweg:

- Bilde G bijektiv und konform mit $f : G \to G^*$ auf *einfacheres* Gebiet G^* ab;
- Transformiere das Potential Φ von G nach G^*, womit

$$\Psi(w) = \Phi(f^{-1}(w)) \qquad \text{für alle } w \in G^*.$$

- Nach dem zweiten Transformationssatz ist Ψ harmonisch, d.h. es gilt

$$\Delta\Psi = 0$$

- Falls f sogar auf dem Rand Γ von G konform ist, so gilt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n^*} = 0$$

für die Normalenableitung des Randes Γ^* von G^*.
- Löse nun das *einfachere* Neumannsche Randwertproblem

$$\Delta\Psi = 0 \text{ in } G^* \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n^*} = 0 \text{ auf } \Gamma^*$$

- Die Lösung in G bekommt man durch Rücktransformation.

Erinnerung:

- **Voraussetzung:** Sei Ψ_0 hinreichend *glatt*, und durch

$$\Psi_0(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt, mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_0(e^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

- Dann kann die Lösung des Dirichlet-Problems direkt angegeben werden mit

$$\Psi(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^{|n|} e^{in\theta} \qquad \text{für } w = \rho e^{i\theta} \text{ mit } 0 \leq \rho \leq 1.$$

- **Rücktransformation:** Die Lösung des ursprünglichen Problems ist somit

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n |f(z)|^{|n|} e^{in\phi} \qquad \text{mit } \phi = \arg(f(z)).$$

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n |f(z)|^{|n|} e^{in\phi} \qquad \text{mit } \phi = \arg(f(z)).$$

Voraussetzungen:

- Sei Γ der Rand des durchströmten Gebiets G (begrenzende Wand);
- die Strömung verläuft dann tangential zum Rand Γ, d.h.
- der Geschwindigkeitsvektor $\mathrm{grad}(\Phi)$ ist der Tangentenvektor von Γ;
- dann verschwindet die `Normalenableitung` von Φ längs Γ.
- Dies führt insgesamt zu dem `Neumannschen Randwertproblem`

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi) &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \end{aligned}$$

das mit der Methode der konformen Transformation gelöst werden kann.

Lösungsweg:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

das mit der Methode der konformen Transformation gelöst werden kann.

Lösungsweg:

- Bilde G bijektiv und konform mit $f : G \to G^*$ auf *einfacheres* Gebiet G^* ab;
- Transformiere das Potential Φ von G nach G^*, womit

$$\Psi(w) = \Phi(f^{-1}(w)) \qquad \text{für alle } w \in G^*.$$

- Nach dem zweiten Transformationssatz ist Ψ harmonisch, d.h. es gilt

$$\Delta\Psi = 0$$

- Falls f sogar auf dem Rand Γ von G konform ist, so gilt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n^*} = 0$$

  für die Normalenableitung des Randes Γ^* von G^*.

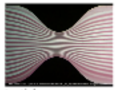
- Löse nun das *einfachere* Neumannsche Randwertproblem

$$\Delta\Psi = 0 \text{ in } G^* \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n^*} = 0 \text{ auf } \Gamma^*$$

- Die Lösung in G bekommt man durch Rücktransformation.

Beispiele für Strömungen

Strömung durch Kanal variabler Breite



- **Physikalische Ebene:** ein Kanal G variabler Breite;
- **Modellebene:** ein gerader Kanal G^*;
- Wirbelfreie Strömungen im geraden Kanal sind homogen mit Potential

$$\Psi(w) = V\mathrm{Re}(w)$$

  wobei V der Betrag des (konstanten) Geschwindigkeitsvektors ist, der die Geschwindigkeit liefert.
- **Aufgabe:**
  Bilde physikalischen Kanal inklusive Rand konform auf den geraden Kanal ab.
- Löse die Neumannsche Randwertaufgabe im geraden Kanal;
- Erhalte die Lösung im physikalischen Kanal durch Rücktransformation.

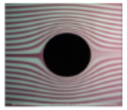
Umströmung eines Hindernisses

Voraussetzungen für die physikalische Ebene:

- homogene Strömung mit Geschwindigkeit V in Richtung der reellen Achse;
- umströmt werde ein zylindrisches Hindernis mit beschränkten Querschnitt;

Frage:

- Wie sieht das Strömungsbild der *gestörten* Strömung aus?



Problembeschreibung/Vereinfachung

Vereinfachte Modellebene:

- Ist das Hindernis eine unendlich dünne Platte parallel zur reellen Achse, so wird die Strömung nicht gestört.
- in diesem Fall ist das Potential gegeben durch $\Psi(w) = V\mathrm{Re}(w)$.
- **Problem:** Bilde das in der physikalischen Ebene durchströmte Gebiet auf aufgeschnittene Ebene $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ ab mit analytischer Funktion f, wobei

$$f(\infty) = \infty \qquad \text{und} \qquad f'(\infty) = 1.$$

- Dann gilt mit dem ersten Transformationssatz

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(\Phi(z)) &= \mathrm{grad}(\Psi(w)) \cdot \overline{f'(z)} \\ \mathrm{grad}(\Phi(\infty)) &= \mathrm{grad}(\Psi(\infty)) \qquad \text{für } z \to \infty \end{aligned}$$

  so dass wir in der physikalischen Ebene und in der Modellebene dieselbe homogene Strömung im Unendlichen bekommen.

Umströmung des Einheitskreiszylinders

- Mit $\mathrm{grad}(\Psi(w)) = V$ und $f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$ erhalten wir

$$q(z) = \mathrm{grad}(\Phi(z)) = \mathrm{grad}(\Psi(f(z))) \cdot \overline{f'(z)} = V\left(1 - \frac{1}{\bar{z}^2}\right)$$

  für den Geschwindigkeitsvektor bzw. in Polarkoordinaten

$$q(re^{i\phi}) = V\left(1 - \frac{1}{r^2}e^{2i\phi}\right)$$

- Speziell an der Zylinderoberfläche bekommen wir das Geschwindigkeitsfeld

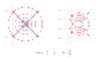
$$q(e^{i\phi}) = V(1 - e^{2i\phi})$$

  mit Geschwindigkeit

$$|q(e^{i\phi})| = V|1 - e^{2i\phi}| = 2V|\sin(\phi)|$$

- Für $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ ist die Geschwindigkeit Null (`Staupunkte`);
- Für $\phi = \pm\pi/2$ ist die Geschwindigkeit maximal, nämlich $2V$.

Umströmung des Einheitskreiszylinders



- Betrachte die Strömung um den Einheitskreiszylinder;
- Mit der gestreckten `Joukowski-Funktion`

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \qquad \text{für } |z| > 1$$

  geht das Äußere des Einheitskreises über in die aufgeschnittene Ebene

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ und } \mathrm{Re}(z) \in [-2, 2]\}$$

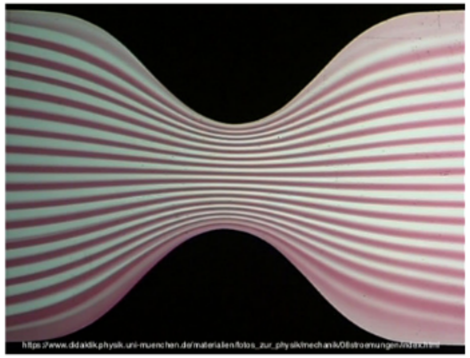
- dabei gilt $f(\infty) = \infty$ und $f'(\infty) = 1$.
- für das Potential in der physikalischen Ebene bekommt man somit

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = V\mathrm{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

  bzw.

$$\Phi(x, y) = V\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

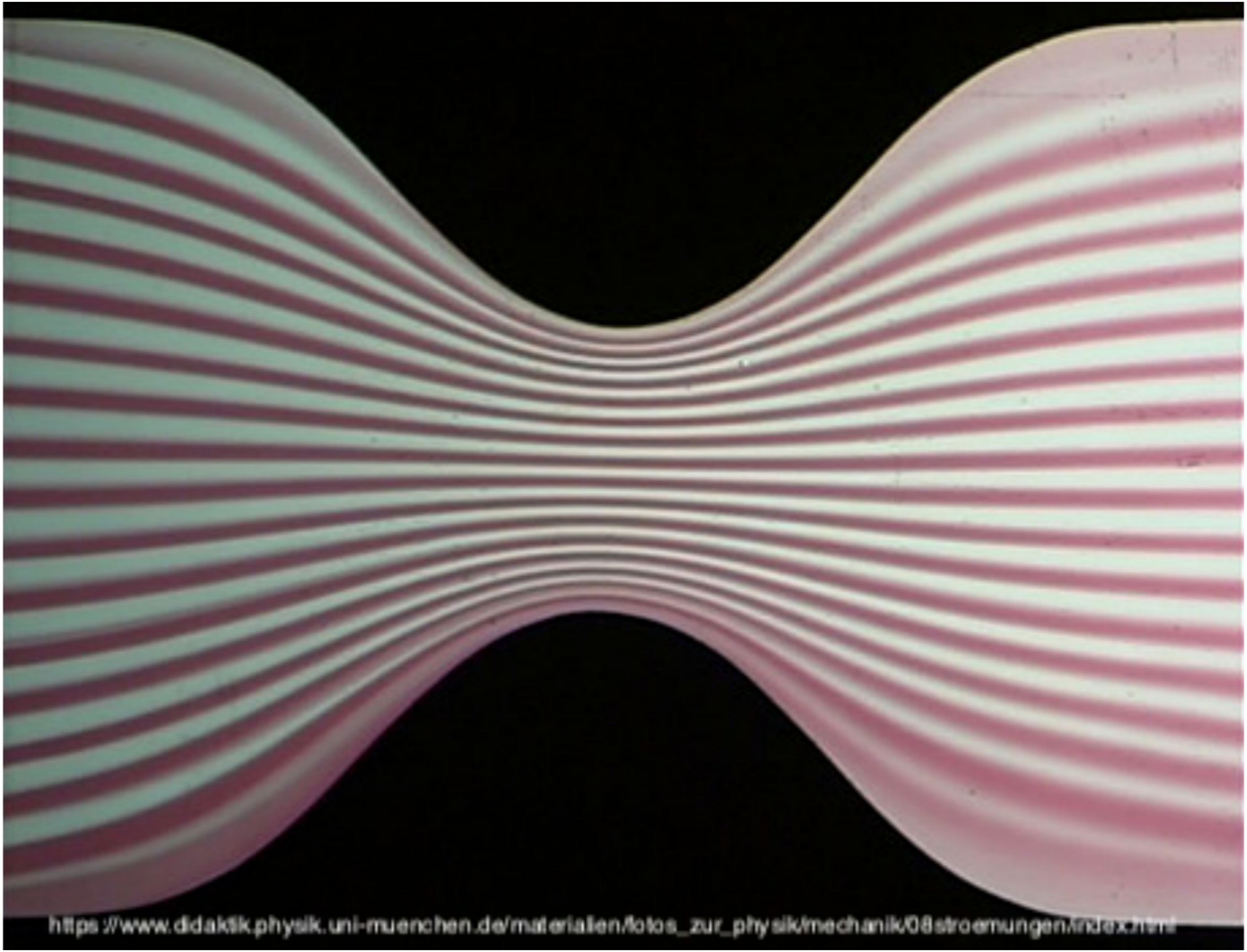
Strömung durch Kanal variabler Breite



- **Physikalische Ebene:** ein Kanal G variabler Breite;
- **Modellebene:** ein gerader Kanal G^*;
- Wirbelfreie Strömungen im geraden Kanal sind homogen mit Potential

$$\Psi(w) = V\mathrm{Re}(w)$$

  wobei V der Betrag des (konstanten) Geschwindigkeitsvektors ist, der die Geschwindigkeit liefert.
- **Aufgabe:**
  Bilde physikalischen Kanal inklusive Rand konform auf den geraden Kanal ab.
- Löse die Neumannsche Randwertaufgabe im geraden Kanal;
- Erhalte die Lösung im physikalischen Kanal durch Rücktransformation.


https://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/materialien/fotos_zur_physik/mechanik/08stroemungen/index.html

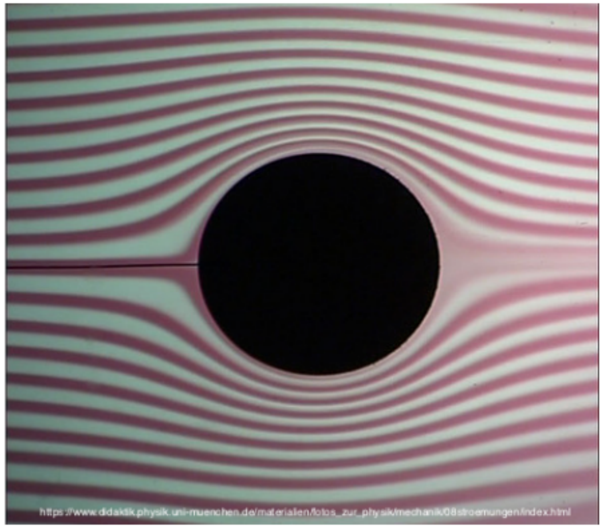
Umströmung eines Hindernisses

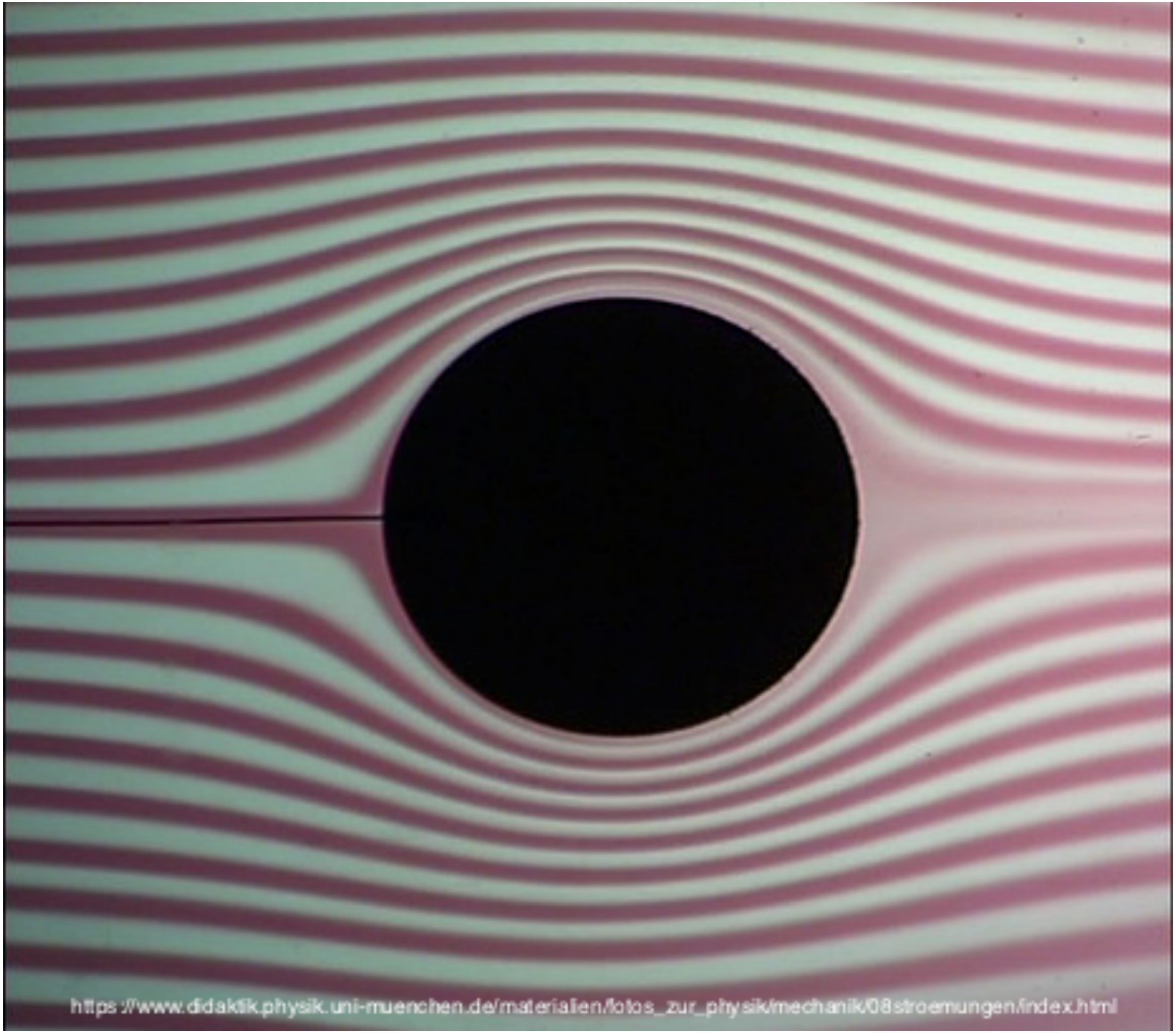
Voraussetzungen für die physikalische Ebene:

- homogene Strömung mit Geschwindigkeit V in Richtung der reellen Achse;
- umströmt werde ein zylindrisches Hindernis mit beschränktem Querschnitt;

Frage:

- Wie sieht das Strömungsbild der gestörten Strömung aus?




https://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/materialien/fotos_zur_physik/mechanik/08stroemungen/index.html

Beachte:

- die Strömung bleibt im Unendlichen ungestört und somit gilt

$$\text{grad}(\Phi(z)) \to V \qquad \text{für } z \to \infty$$

für den Geschwindigkeitsvektor, kurz $\text{grad}(\Phi(\infty)) = V$.

Problembeschreibung/Vereinfachung

Vereinfachte Modellebene:

- Ist das Hindernis eine unendlich dünne Platte parallel zur reellen Achse, so wird die Strömung nicht gestört.
- in diesem Fall ist das Potential gegeben durch $\Psi(w) = V\mathrm{Re}(w)$.
- **Problem:** Bilde das in der physikalischen Ebene durchströmte Gebiet auf aufgeschnittene Ebene $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ ab mit analytischer Funktion f, wobei

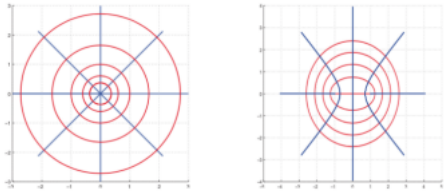
$$f(\infty) = \infty \qquad \text{und} \qquad f'(\infty) = 1.$$

- Dann gilt mit dem ersten Transformationssatz

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(\Phi(z)) &= \mathrm{grad}(\Psi(w)) \cdot \overline{f'(z)} \\ \mathrm{grad}(\Phi(\infty)) &= \mathrm{grad}(\Psi(\infty)) \qquad \text{für } z \to \infty \end{aligned}$$

  so dass wir in der physikalischen Ebene und in der Modellebene dieselbe homogene Strömung im Unendlichen bekommen.

Umströmung des Einheitskreiszylinders



$z \mapsto f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

- Betrachte die Strömung um den Einheitskreiszylinder;
- Mit der gestreckten `Joukowski-Funktion`

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \qquad \text{für } |z| > 1$$

geht das Äußere des Einheitskreises über in die aufgeschnittene Ebene

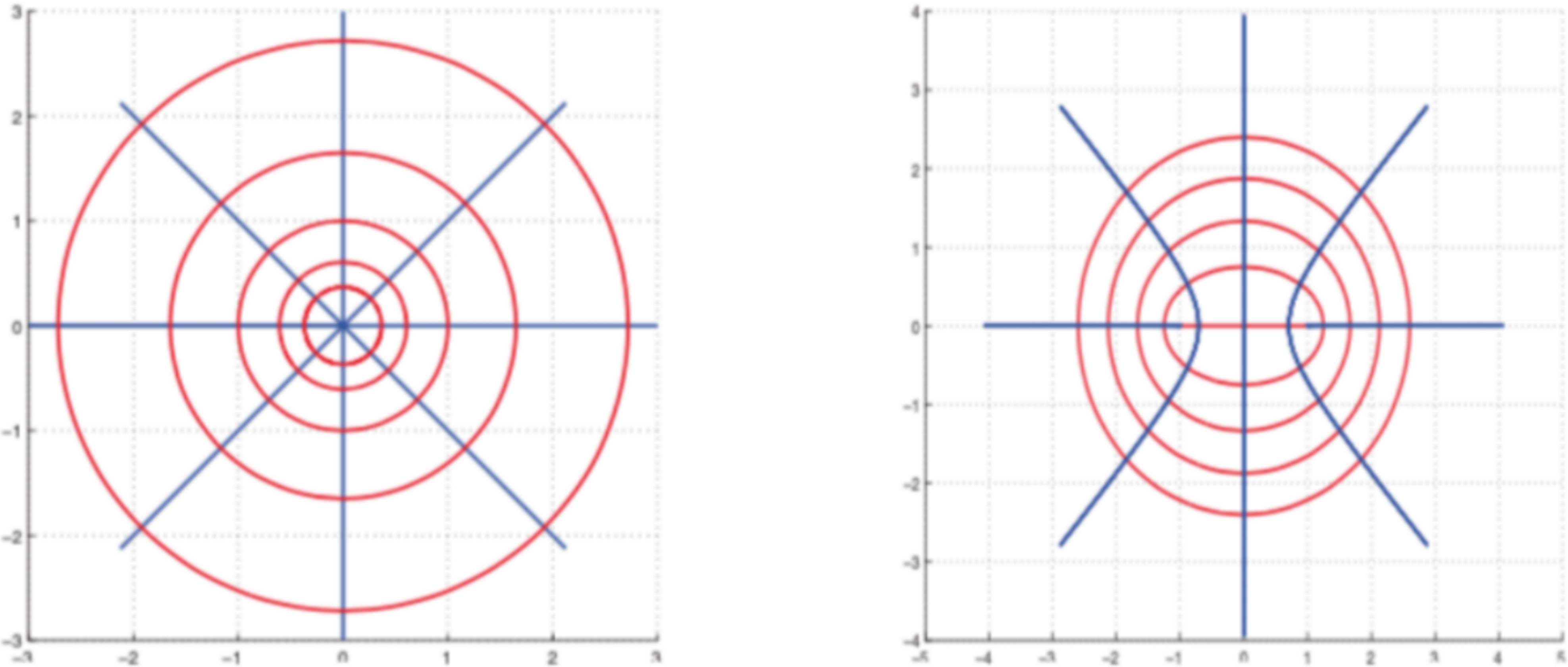
$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ und } \mathrm{Re}(z) \in [-2, 2]\}$$

- dabei gilt $f(\infty) = \infty$ und $f'(\infty) = 1$.
- für das Potential in der physikalischen Ebene bekommt man somit

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = V\mathrm{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

bzw.

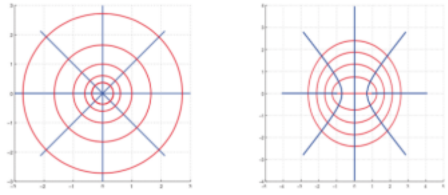
$$\Phi(x, y) = V\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$



$$z \mapsto f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Umströmung des Einheitskreiszylinders

- Betrachte die Strömung um den Einheitskreiszylinder;
- Mit der gestreckten Joukowski-Funktion



$z \mapsto f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \qquad \text{für } |z| > 1$$

geht das Äußere des Einheitskreises über in die aufgeschnittene Ebene

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ und } \mathrm{Re}(z) \in [-2, 2]\}$$

- dabei gilt $f(\infty) = \infty$ und $f'(\infty) = 1$.
- für das Potential in der physikalischen Ebene bekommt man somit

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = V\mathrm{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

bzw.

$$\Phi(x, y) = V\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

Umströmung des Einheitskreiszylinders

- Mit $\mathrm{grad}(\Psi(w)) \equiv V$ und $f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$ erhalten wir

$$q(z) = \mathrm{grad}(\Phi(z)) = \mathrm{grad}(\Psi(f(z))) \cdot \overline{f'(z)} = V\left(1 - \frac{1}{\bar{z}^2}\right)$$

  für den Geschwindigkeitsvektor bzw. in Polarkoordinaten

$$q(re^{i\phi}) = V\left(1 - \frac{1}{r^2}e^{2i\phi}\right)$$

- Speziell an der Zylinderoberfläche bekommen wir das Geschwindigkeitsfeld

$$q(e^{i\phi}) = V(1 - e^{2i\phi})$$

  mit Geschwindigkeit

$$|q(e^{i\phi})| = V|1 - e^{2i\phi}| = 2V|\sin(\phi)|$$

- Für $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ ist die Geschwindigkeit Null (`Staupunkte`);
- Für $\phi = \pm\pi/2$ ist die Geschwindigkeit maximal, nämlich $2V$.

Komplexe Integration
Einführung

Ziel:
Sei $f : D \to W \subset \mathbb{C}$ komplexe Funktion und $\Gamma \subset D \subset \mathbb{C}$ ein Weg von f im Definitionsbereich.
Berechne

$$\int_\Gamma f(z)\, dz$$

Fragen:

- Sinnvolle Definition eines komplexen Integrals?
- Berechenbarkeit?
- Auf welche f anwendbar?
- Abhängigkeit von Γ?
- Komplexe Funktion als komplexes Integral darstellbar?

Idee: Riemannsche Summe!

Bemerkungen:

- Ist f reellwertig auf der reellen Achse und ist $\Gamma = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ beschränktes Intervall der reellen Achse, so stimmt das komplexe Kurvenintegral mit dem entsprechenden Riemannschen Integral überein.
- Das komplexe Kurvenintegral existiert unter folgenden Bedingungen:
  1. f ist stückweise stetig längs Γ,
  2. Γ besitzt eine Parametrisierung $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, die stückweise stetig differenzierbar ist, so dass $z'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$.
     Geometrische Interpretation: Die Tangente der Kurve Γ variiert stetig längs Γ, außer an endlich vielen Knickstellen, d.h. Γ ist stückweise glatt.
- 1. und 2. werden im Folgenden immer vorausgesetzt.

Vorbemerkungen:

- Komplexe Funktion: $f : D \to W$, Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$.
- Parametrisierte, orientierte Kurve: ($\Gamma \subset D$ beschränkt)

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \in D, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

  mit $z(\alpha)$ Anfangs- und $z(\beta)$ Endpunkt von Γ.
- Zerlegung: Zerlege Γ in n Teilkurven mit jeweils Anfangs- und Endpunkten

$$z_0 = z(t_0), z_1 = z(t_1), \ldots, z_{n-1} = z(t_{n-1}), z_n = z(t_n),$$

  wobei $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$.
- Partialsumme: Mit $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ bilde Partialsumme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k, \quad \text{mit } \zeta_k \in \Gamma|_{[z_k, z_{k+1}]}.$$

Definition: (Komplexes Kurvenintegral)
Falls für jede Zerlegungsfolge $z_0, \ldots, z_n$ für Γ mit

$$\max_{0 \le k < n} |\Delta z_k| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

und jede Wahl von Zwischenpunkten $\zeta_k \in \Gamma|_{[z_k, z_{k+1}]}$ der Grenzwert der Partialsummen existiert und jeweils den selben Wert ergibt, so wird der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k =: \int_\Gamma f(z)\, dz$$

als Integral der Funktion f längs der Kurve Γ bezeichnet.
Man spricht vom komplexen Kurvenintegral des Integranden f auf dem Integrationsweg Γ.

Ziel:
Sei $f : D \to W \subset \mathbb{C}$ komplexe Funktion und $\Gamma \subset D \subset \mathbb{C}$ ein Weg von f im Definitionsbereich.
Berechne

$$\int_\Gamma f(z)\, dz$$

Fragen:

- Sinnvolle Definition eines komplexen Integrals?
- Berechenbarkeit?
- Auf welche f anwendbar?
- Abhängigkeit von Γ?
- Komplexe Funktion als komplexes Integral darstellbar?

Idee: Riemannsche Summe!

Vorbemerkungen:

- Komplexe Funktion: $f : D \to W$, Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$.
- Parametrisierte, orientierte Kurve: ($\Gamma \subset D$ beschränkt)

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \in D, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

mit $z(\alpha)$ Anfangs- und $z(\beta)$ Endpunkt von Γ.

- Zerlegung: Zerlege Γ in n Teilkurven mit jeweils Anfangs- und Endpunkten

$$z_0 = z(t_0), z_1 = z(t_1), \ldots, z_{n-1} = z(t_{n-1}), z_n = z(t_n),$$

wobei $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$.

- Partialsumme: Mit $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ bilde Partialsumme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad \text{mit } \zeta_k \in \Gamma|_{[z_k, z_{k+1}]}.$$

Definition: (Komplexes Kurvenintegral)
Falls für jede Zerlegungsfolge $z_0, \ldots, z_n$ für Γ mit

$$\max_{0 \le k < n} |\Delta z_k| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

und jede Wahl von Zwischenpunkten $\zeta_k \in \Gamma|_{[z_k, z_{k+1}]}$ der Grenzwert der Partialsummen existiert und jeweils den selben Wert ergibt, so wird der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k =: \int_\Gamma f(z)\, dz$$

als Integral der Funktion f längs der Kurve Γ bezeichnet.
Man spricht vom komplexen Kurvenintegral des Integranden f auf dem Integrationsweg Γ.

Bemerkungen:

- Ist f reellwertig auf der reellen Achse und ist $\Gamma = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ beschränktes Intervall der reellen Achse, so stimmt das komplexe Kurvenintegral mit dem entsprechenden Riemannschen Integral überein.

- Das komplexe Kurvenintegral existiert unter folgenden Bedingungen:

  1. f ist stückweise stetig längs Γ,
  2. Γ besitzt eine Parametrisierung $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, die stückweise stetig differenzierbar ist, so dass $z'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$.
     Geometrische Interpretation: Die Tangente der Kurve Γ variiert stetig längs Γ, außer an endlich vielen Knickstellen, d.h. Γ ist stückweise glatt.

- 1. und 2. werden im Folgenden immer vorausgesetzt.

1

Komplexe Integration Berechnung+Eigenschaften

Vorbemerkungen

- Ziel: Reduktion eines komplexen Integrals auf zwei reelle Integrale.
- Komplexe Funktion und Kurve: Sei $f : D \to W$ stetige komplexe Funktion. Sei Γ der parametrisierte Integrationsweg
$$\Gamma : t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$
- Zerlegung: Das Parameterintervall $[\alpha, \beta]$ sei zerlegt mit
$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$
so dass Γ in n Teilkurven zerlegt ist mit jeweils Anfangs- und Endpunkten
$$z_0 = z(t_0), z_1 = z(t_1), \ldots, z_{n-1} = z(t_{n-1}), z_n = z(t_n)$$
- Teilstücke: Setze für $k = 0, \ldots, n-1$
$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k \quad \text{und} \quad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k.$$

2

"Rezept" zur Integralberechnung

Aufgabe: Berechne komplexes Kurvenintegral
$$\int_\Gamma f(z)\,dz$$

Lösungsweg:

(a) Stelle den Integrationsweg Γ in Parameterform dar
$$\Gamma : t \mapsto z(t) \qquad \text{für } \alpha \le t \le \beta$$

(b) Substituiere im Integral $z = z(t)$, somit $dz = z'(t)\,dt$;

(c) Ersetze den Integrationsweg Γ durch die reellen Grenzen α und β.

(d) Berechne das Integral
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt.$$

3

Eigenschaften

- Additivität bezüglich des Integranden.
Für zwei komplexe Funktionen f und g gilt
$$\int_\Gamma [f(z) + g(z)]\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_\Gamma g(z)\,dz.$$
- Homogenität bezüglich des Integranden.
Für eine komplexe Funktionen f und eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gilt
$$\int_\Gamma cf(z)\,dz = c\int_\Gamma f(z)\,dz.$$
- Additivität bezüglich des Integrationsweges. Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Kurven, wobei der Endpunkt von Γ_1 mit dem Anfangspunkt von Γ_2 übereinstimmt. Dann gilt für die zusammengesetzte Kurve $\Gamma_1 + \Gamma_2$
$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$
- Homogenität bezüglich des Integrationsweges.
Sei $-\Gamma$ die zu Γ in entgegengesetzter Richtung durchlaufene Kurve. Dann gilt
$$\int_{-\Gamma} f(z)\,dz = -\int_\Gamma f(z)\,dz.$$
- Obere Schranke für den Betrag des Integrals.
Sei L die Länge der Kurve Γ. Dann gilt die Standardabschätzung
$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le L \max_{z\in\Gamma} |f(z)|$$

Beweis: Mit $M = \max_{z\in\Gamma} |f(z)|$ gilt die Abschätzung
$$|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k| \le ML$$
für die n-te Partialsumme und somit $|S_n| \le ML$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ folgt die Behauptung.

Vorbemerkungen:

- Ziel: Reduktion eines komplexen Integrals auf zwei reelle Integrale.

- Komplexe Funktion und Kurve: Sei $f : D \to W$ stetige komplexe Funktion. Sei Γder parametrisierte Integrationsweg

$$\Gamma : t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

- Zerlegung: Das Parameterintervall $[\alpha, \beta]$ sei zerlegt mit

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

so dass Γ in n Teilkurven zerlegt ist mit jeweils Anfangs- und Endpunkten

$$z_0 = z(t_0), z_1 = z(t_1), \ldots, z_{n-1} = z(t_{n-1}), z_n = z(t_n)$$

- Teilstücke: Setze für $k = 0, \ldots, n-1$

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k \quad \text{und} \quad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k.$$

2

Eigenschafte

"Rezept" zur Integralberechnung

Aufgabe: Berechne komplexes Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz$$

Lösungsweg:

(a) Stelle den Integrationsweg Γ in Parameterform dar

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \qquad \text{für } \alpha \leq t \leq \beta$$

(b) Substituiere im Integral $z = z(t)$, somit $dz = z'(t)\,dt$;

(c) Ersetze den Integrationsweg Γ durch die reellen Grenzen α und β.

(d) Berechne das Integral

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)\,dt.$$

3

Eigenschaften

- `Additivität bezüglich des Integranden`.
  Für zwei komplexe Funktionen f und g gilt
  $$\int_\Gamma (f(z) + g(z))\, dz = \int_\Gamma f(z)\, dz + \int_\Gamma g(z)\, dz.$$
- `Homogenität bezüglich des Integranden`.
  Für eine komplexe Funktionen f und eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gilt
  $$\int_\Gamma c f(z)\, dz = c \int_\Gamma f(z)\, dz.$$
- `Additivität bezüglich des Integrationsweges`. Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Kurven, wobei der Endpunkt von Γ_1 mit dem Anfangspunkt von Γ_2

$$\int_\Gamma c f(z)\,dz = c\int_\Gamma f(z)\,dz.$$

- Additivität bezüglich des Integrationsweges. Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Kurven, wobei der Endpunkt von Γ_1 mit dem Anfangspunkt von Γ_2 übereinstimmt. Dann gilt für die zusammengesetzte Kurve $\Gamma_1 + \Gamma_2$
$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$
- Homogenität bezüglich des Integrationsweges.
Sei $-\Gamma$ die zu Γ in entgegengesetzter Richtung durchlaufene Kurve. Dann gilt
$$\int_{-\Gamma} f(z)\,dz = -\int_\Gamma f(z)\,dz.$$

- Obere Schranke für den Betrag des Integrals.
Sei L die Länge der Kurve Γ. Dann gilt die Standardabschätzung

- Obere Schranke für den Betrag des Integrals.
  Sei L die Länge der Kurve Γ. Dann gilt die Standardabschätzung

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)\, dz \right| \leq L \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$$

Beweis: Mit $M = \max_{z\in\Gamma} |f(z)|$ gilt die Abschätzung

$$|S_n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k| \leq ML$$

für die n-te Partialsumme und somit $|S_n| \leq ML$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ folgt die Behauptung.

Integrale analytischer Funktionen

Vorbemerkungen:

- **Grundvoraussetzung**: Sei $f : D \to W$ analytisch.
- Sei weiter D offen und einfach zusammenhängend.
- Der Integrationsweg Γ heißt geschlossen, falls Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen.
- Γ heißt einfach geschlossen, falls die Kurve Γ keine Schnittpunkte besitzt, d.h. für alle Parameter $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$, einer beliebigen Parametrisierung von

  $$\Gamma : t \mapsto z(t) \quad \text{mit } \alpha \leq t \leq \beta \ (\alpha < \beta)$$

  gilt: $z(t_1)) \neq z(t_2)$ für alle $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$, d.h. $z(t)$ ist injektiv auf $]\alpha, \beta[$.

Satz: (Cauchyscher Integralsatz)
Sei $f : D \to W$ auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset D$ analytisch.
Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Also: das Integral längs geschlossener Kurven in G ist Null.

4

Vorbemerkungen:

- **Grundvoraussetzung**: Sei $f : D \to W$ analytisch.
- Sei weiter D offen und einfach zusammenhängend.
- Der Integrationsweg Γ heißt geschlossen, falls Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen.
- Γ heißt einfach geschlossen, falls die Kurve Γ keine Schnittpunkte besitzt, d.h. für alle Parameter $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$, einer beliebigen Parametrisierung von

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \quad \text{mit } \alpha \leq t \leq \beta \ (\alpha < \beta)$$

gilt: $z(t_1)) \neq z(t_2)$ für alle $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$, d.h. $z(t)$ ist injektiv auf $]\alpha, \beta[$.

Satz: (Cauchyscher Integralsatz)
Sei $f : D \to W$ auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset D$ analytisch. Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Also: das Integral längs geschlossener Kurven in G ist Null.

Beispiele für Strömungen

Komplexe Integration Einführung

Neumannsches Randwertproblem

Komplexe Integration Berechnung+Eigenschaften

Komplexe Funktionen

Erinnerung

Integrale analytischer Funktionen