Komplexe Funktionen

11.06.2018

J. Behrens

(1) Herleitung der Taylor-Reihe:

- Betrachte: - f analytisch in $G \subset \mathbb{C}$, $\Gamma \subset G$ einfach, geschlossen, positiv orientierte Kurve
  - Es gilt die Cauchysche Integralformel
    $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \forall z \in G, \text{ von } \Gamma \text{ umlaufen}$$
  - Sei $a \in G$, von Γ umlaufen
  - Bezeichne r den Abstand zwischen a und Γ
    $$r = \min_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - a|$$
  - Sei z im offenen Kreis um a mit Radius r
    $$z \in B_r(a) = \{ w \in \mathbb{C} : |w - a| < r \}$$
    Es gilt insbesondere $|z-a| < r$.
- Es gilt: $\dfrac{1}{\zeta - z} = \dfrac{1}{\zeta - a + a - z} = \dfrac{1}{\zeta - a} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}}$
- Weil $|z-a| < r$ und $|\zeta - a| \geq r$ $(\zeta \in \Gamma)$ gilt
  $$1 > |q| := \left| \frac{z-a}{\zeta - a} \right|$$
- Damit (geometrische Reihe)
  $$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^\infty q^n = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right)^n \qquad (\zeta \in \Gamma)$$

- Somit (Cauchysche Integralformel):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n d\zeta \qquad \forall \left(z \in B_r(a)\right)$$

- Vertausche Summation und Integration:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

- Cauchy-Formel für Ableitungen:

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

- Damit folgt die Taylor Reihendarstellung:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n}$$

- Dies ist die Taylor-Reihe von f um den Entwicklungspunkt a:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots$$

- <u>Beobachtungen</u>:
  - Die Taylor-Reihe konvergiert in $B_r(a)$ und stellt dort $f(z)$ dar.
  - Die Taylor-Reihe hängt nur von f und a ab, nicht von Γ.
  - Der Konvergenzbereich hängt nur von f und a ab.

② Beispiel:

- Betrachte die Exponentialfunktion $\exp(z)$.
- Es gilt: $\frac{d^n}{dz^n} \exp(z) = \exp(z) \qquad n = 1, 2, \dots$
- Also: $\frac{d^n}{dz^n} \exp(z) \Big|_{z=0} = 1$
- Damit: $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (*)$
- exp ist in ganz $\mathbb{C}$ analytisch $\Rightarrow$ Taylor-Reihe $(*)$ gilt in ganz $\mathbb{C}$.

③ Beweis Laurent-Reihendarstellung:

- Sei $z \in R$. Für $\zeta \in \Gamma_2$ (äußerer Kreisringrand) gilt
$$|\zeta - a| > |z - a| \text{ und } \left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right| < 1$$
- Damit (siehe Taylor-Reihe):
$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n$$
- Es folgt: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n c_n$$
- Andererseits gilt für Γ_1 (innerer Kreisringrand): $\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| < 1$
- Also: $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} = -\frac{1}{z - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^n$

• Damit:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\,d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\;\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\zeta)(\zeta-a)^n\,d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^{-n-1}c_{-n-1} = \sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n \qquad \boxtimes$$

(4) Beispiel:

• Bestimme die Laurent-Reihe für $f(z)=\frac{\sin(z)}{z^2}$ in $R_0^{\infty}=\mathbb{C}\setminus\{0\}$

• Es gilt $\sin(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}\pm\dots$

• Daher ist $\frac{\sin(z)}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\frac{z^5}{7!}\pm\dots$

die Laurent-Reihe mit Entwicklungszentrum 0.