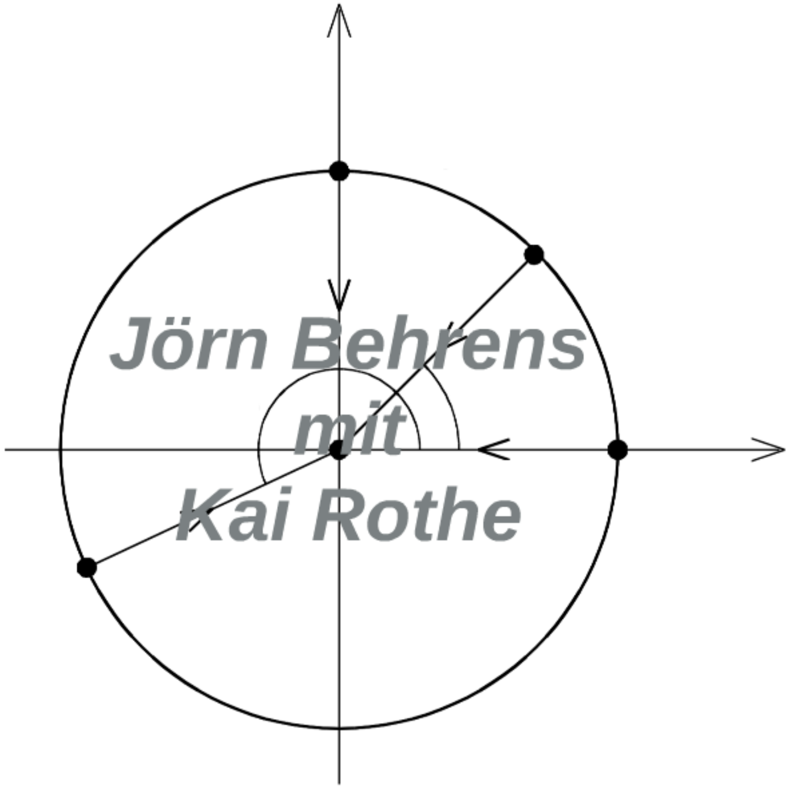
Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Die Taylor-Reihe

Erinnerung

Satz: (Cauchysche Integralformel)
Sei f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und sei Γ eine geschlossene positiv orientierte Kurve in G. Dann gilt für jeden Punkt $a \in G$, der von Γ umlaufen wird, die Cauchysche Integralformel

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz.$$

Satz (Cauchysche Integralformel für die Ableitungen): *Sei* f *in einem Gebiet analytisch. Dann existieren alle Ableitungen von* f *in* G*, und diese Ableitungen sind jeweils analytisch in* G*. Weiterhin gilt für eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve* $\Gamma \subset G$*, deren Inneres* G_Γ *ganz in* G *liegt, die Cauchysche Integralformel*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

für die Ableitungen $f^{(n)}$ *von* f *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Erinnerung: (Geometrische Reihe)

- **Endliche geometrische Reihe:** Es gilt die Summenformel

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \quad q \in \mathbb{C} \setminus 1.$$

- **Unendliche geometrische Reihe:** Falls $|q| < 1$, so konvergiert die unendliche geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

Falls $|q| \geq 1$ divergiert die Reihe.

1

Satz: (Cauchysche Integralformel)
Sei f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und sei Γ eine geschlossene positiv orientierte Kurve in G. Dann gilt für jeden Punkt $a \in G$, der von Γ umlaufen wird, die Cauchysche Integralformel

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

Satz (Cauchysche Integralformel für die Ableitungen): *Sei* f *in einem Gebiet analytisch. Dann existieren alle Ableitungen von* f *in* G*, und diese Ableitungen sind jeweils analytisch in* G*. Weiterhin gilt für eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve* $\Gamma \subset G$*, deren Inneres* G_Γ *ganz in* G *liegt, die Cauchysche Integralformel*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

für die Ableitungen $f^{(n)}$ *von* f *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Erinnerung: (Geometrische Reihe)

- **Endliche geometrische Reihe:** Es gilt die Summenformel

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \quad q \in \mathbb{C}\backslash 1.$$

- **Unendliche geometrische Reihe:** Falls $|q| < 1$, so konvergiert die unendliche geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Falls $|q| \geq 1$ divergiert die Reihe.

Taylor Reihe

Satz: (Taylor-Reihe)
Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. Dann konvergiert die Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

gegen $f(z)$ für alle z innerhalb des größten Kreises um a, dessen inneres ganz in G enthalten ist ($z \in B_r(a) \subset G$).

Beispiel: (Reihendarstellung von $\exp(-z^2)$)
Für die Taylor-Reihe von $\exp(-z^2)$ um Null gilt

$$\exp(-z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n!} = 1 - \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} \pm \cdots$$

in ganz $\mathbb{C}$.

Beispiel: (Reihendarstellung von $\sin(z)$)
Die Funktion $\sin(z)$ besitzt die bekannte Reihendarstellung (um Null)

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \cdots$$

Die Funktion $\sin(z)$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch und die Reihe konvergiert in ganz $\mathbb{C}$.

Satz: (Eindeutigkeit der Taylor-Reihe)
Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. In einer Umgebung von a gelte für $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit komplexen Konstanten $c_n \in \mathbb{C}$ für $n = 1, 2, \ldots$ Dann gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

d.h. die obige Reihe ist die Taylor-Reihe von f um a.

Beweis: Für $z = a$ gilt $f(a) = c_0$. Durch Differentiation von f erhält man

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} \text{ bzw. } f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}$$

und somit $f'(a) = c_1$ bzw. $f^{(n)}(a) = n! c_n$ für $z = a$, d.h. die Koeffizienten c_n stimmen mit den Koeffizienten der Taylor-Reihe überein. 2

Weiteres Beispiel:

- Wir entwickeln die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

  um Null. Für $|z| < 1$ gilt die Darstellung

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \pm \ldots$$

- Dies ist bereits die Taylor-Reihe von $f(z)$ um Null.
- Die Taylor-Reihe konvergiert im Einheitskreis, d.h. für $|z| < 1$.
- **Begründung:** Die Funktion $f(z)$ ist analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, und der größte Kreis um Null, in dem f analytisch ist, ist der Einheitskreis.

Taylor Reihe

Satz: (Taylor-Reihe)
Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. Dann konvergiert die Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

gegen $f(z)$ für alle z innerhalb des größten Kreises um a, dessen inneres ganz in G enthalten ist ($z \in B_r(a) \subset G$).

arstellung von $\exp(-z^2)$)
e von $\exp(-z^2)$ um Null gilt

Satz: (Eindeutigkeit der Taylor-Reihe)
Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. In einer Umgebung von a gel

Satz: (Eindeutigkeit der Taylor-Reihe)
Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. In einer Umgebung von a gelte für $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit komplexen Konstanten $c_n \in \mathbb{C}$ für $n = 1, 2, \ldots$ Dann gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

d.h. die obige Reihe *ist* die Taylor-Reihe von f um a.

Beweis: Für $z = a$ gilt $f(a) = c_0$. Durch Differentiation von f erhält man

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} \text{ bzw. } f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}$$

und somit $f'(a) = c_1$ bzw. $f^{(n)}(a) = n! c_n$ für $z = a$, d.h. die Koeffizienten c_n stimmen mit den Koeffizienten der Taylor-Reihe überein.

2

Beispiel: (Reihendarstellung von $\exp(-z^2)$)
Für die Taylor-Reihe von $\exp(-z^2)$ um Null gilt

$$\exp(-z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n!} = 1 - \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} \pm \cdots$$

in ganz $\mathbb{C}$.

Beispiel: (Reihendarstellung von $\sin(z)$)
Die Funktion $\sin(z)$ besitzt die bekannte Reihendarstellung (um Null)

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \cdots$$

Die Funktion $\sin(z)$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch und die Reihe konvergiert in ganz $\mathbb{C}$.

Weiteres Beispiel:

- Wir entwickeln die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

  um Null. Für $|z| < 1$ gilt die Darstellung

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \pm \ldots$$

- Dies ist bereits die Taylor-Reihe von $f(z)$ um Null.
- Die Taylor-Reihe konvergiert im Einheitskreis, d.h. für $|z| < 1$.
- **Begründung:** Die Funktion $f(z)$ ist analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, und der größte Kreis um Null, in dem f analytisch ist, ist der Einheitskreis.

Cauchysche Koeffizienten Abschätzungsformel

Satz: *Die Funktion f sei analytisch im Gebiet G. Die abgeschlossene Kreisscheibe $|z-a| \le r$, $r > 0$, sei in G enthalten, und es sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

die Taylor-Reihe von f um a, also

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Weiterhin sei

$$M(r) = \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Dann gilt die Cauchysche Koeffizientenabschätzungsformel

$$|c_n| \le \frac{M(r)}{r^n} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Interpretation: Die Werte $f^{(n)}(a)$ können nicht beliebig schnell anwachsen.

Beweis: Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz.$$

Somit ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \left(\max_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}} \right) 2\pi r \\ &= \frac{M(r)}{r^n} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Satz: *Die Funktion* f *sei analytisch im Gebiet* G. *Die abgeschlossene Kreisscheibe* $|z-a| \leq r$, $r > 0$, *sei in* G *enthalten, und es sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

die Taylor-Reihe von f *um* a, *also*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Weiterhin sei

$$M(r) = \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Dann gilt die Cauchysche Koeffizientenabschätzungsformel

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Interpretation: Die Werte $f^{(n)}(a)$ können nicht beliebig schnell anwachsen.

Beweis: Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

Beweis: Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz.$$

Somit ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\max_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}} \right) 2\pi r \\ &= \frac{M(r)}{r^n} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Satz von Liouville

Satz (Satz von Liouville): *Ist eine komplexe Funktion f in der ganzen komplexen Ebene analytisch und beschränkt, so ist f konstant auf ganz $\mathbb{C}$.*

Beweis: Sei f analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ und beschränkt, d.h. es gibt ein M mit

$$|f(z)| \leq M \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt für $a \in \mathbb{C}$ mit der Cauchyschen Koeffizientenabschätzungsformel

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$$

für beliebiges $r > 0$. Für $r \to \infty$ folgt daraus

$$f'(a) = 0.$$

Da a beliebig war, gilt $f' \equiv 0$ auf ganz $\mathbb{C}$, d.h. f ist konstant auf ganz $\mathbb{C}$.

Satz von Liouville

Satz (Satz von Liouville): *Ist eine komplexe Funktion* f *in der ganzen komplexen Ebene analytisch und beschränkt, so ist* f *konstant auf ganz* $\mathbb{C}$.

Beweis: Sei f analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ und beschränkt, d.h. es gibt ein M mit

$$|f(z)| \leq M \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt für $a \in \mathbb{C}$ mit der Cauchyschen Koeffizientenabschätzungsformel

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$$

für beliebiges $r > 0$. Für $r \to \infty$ folgt daraus

$$f'(a) = 0.$$

Da a beliebig war, gilt $f' \equiv 0$ auf ganz $\mathbb{C}$, d.h. f ist konstant auf ganz $\mathbb{C}$.

Laurent Reihe

Vorbemerkungen:

- Sei f analytisch im *zweifach zusammenhängenden* Gebiet G.
- Ziel: Stelle f in G durch geeignete Reihen-Entwicklung dar.
- Betrachte Kreisring: Für $a \in \mathbb{C}$ und $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$ sei f analytisch in

$$R = R_{r_1}^{r_2}(a) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-a| < r_2\} = B_{r_2}(a) \setminus \overline{B_{r_1}(a)}.$$

$B_r(a)$ ist der offene, $\overline{B_r(a)}$ der abgeschlossene Kreis um a mit Radius r.

- Falls $r_1 = 0$, so ist $R = B_{r_2}(a) \setminus \{a\}$.
- Falls $r_2 = \infty$, so ist $R = \mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_1}(a)}$.
- Beachte: f kann nicht nach ganzen positiven Potenzen von $z-a$ in R entwickelt werden, denn sonst wäre f analytisch in ganz $B_{r_2}(a)$!

Satz: (Laurent-Reihenentwicklung)
Sei f analytisch im Kreisring $R = R_{r_1}^{r_2}(a)$ und sei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

wobei $\Gamma \subset R$ eine beliebige Kurve ist, die $B_{r_1}(a)$ einmal im positiven Sinne umläuft.
Dann gilt die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in R.$$

Definition: (Laurent-Reihe)
Die eben definierte Reihe heißt Laurent-Reihe von f in R.
Weiterhin heißt a das Entwicklungszentrum der Laurent-Reihe.

Bemerkungen:

- Falls f in ganz $B_{r_2}(a)$ analytisch ist, so gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = 0 \qquad \text{für } n = -1, -2, -3, \dots$$

In diesem Fall enthält die Laurent-Reihe keine negativen Potenzen von $z-a$ und stimmt daher mit der Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{für alle } z \in B_{r_2}(a).$$

überein. Insbesondere gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

- Die Werte der Laurent-Koeffizienten c_n sind unabhängig von Γ.

Lemma: *Die Funktion f sei analytisch im Kreisring $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$. Weiterhin sei $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{für alle } \rho_1 < |z-a| < \rho_2,$$

wobei Γ_1 der innere und Γ_2 der äußere Kreisrand von $R_{\rho_1}^{\rho_2}$ ist.

Beweis: Sei $z \in R_{\rho_1}^{\rho_2}$. Dann gilt (siehe Skizze)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Wegen $\Gamma_3 + \Gamma_4 = \Gamma_2 - \Gamma_1$ folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \end{aligned}$$

3

Vorbemerkungen:

- Sei f analytisch im *zweifach zusammenhängenden* Gebiet G.
- Ziel: Stelle f in G durch geeignete Reihen-Entwicklung dar.
- Betrachte Kreisring: Für $a \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ sei f analytisch in

$$R = R_{r_1}^{r_2}(a) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - a| < r_2\} = B_{r_2}(a) \backslash \overline{B_{r_1}(a)}.$$

$B_r(a)$ ist der offene, $\overline{B_r(a)}$ der abgeschlossene Kreis um a mit Radius r.

- Falls $r_1 = 0$, so ist $R = B_{r_2}(a) \backslash \{a\}$.
- Falls $r_2 = \infty$, so ist $R = \mathbb{C} \backslash \overline{B_{r_1}(a)}$.
- Beachte: f kann nicht nach ganzen positiven Potenzen von $z - a$ in R entwickelt werden, denn sonst wäre f analytisch in ganz $B_{r_2}(a)$!

urent-Reihenentwicklung)

- Falls $r_2 = \infty$, so ist $R = \mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_1}(a)}$.

- Beachte: f kann nicht nach ganzen positiven Potenzen von $z - a$ in R entwickelt werden, denn sonst wäre f analytisch in ganz $B_{r_2}(a)$!

Satz: (Laurent-Reihenentwicklung)
Sei f analytisch im Kreisring $R = R_{r_1}^{r_2}(a)$ und sei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

wobei $\Gamma \subset R$ eine beliebige Kurve ist, die $B_{r_1}(a)$ einmal im positiven Sinne umläuft.
Dann gilt die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in R.$$

Definition: (Laurent-Reihe)

Die eben definierte Reihe heißt Laurent-Reihe von f in R.
Weiterhin heißt a das Entwicklungszentrum der Laurent-Reihe.

en:

anz $B_{r_2}(a)$ analytisch ist, so gilt

Lemma: *Die Funktion* f *sei analytisch im Kreisring* $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$
$r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. *Dann gilt*

Bemerkungen:

- Falls f in ganz $B_{r_2}(a)$ analytisch ist, so gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = 0 \qquad \text{für } n = -1, -2, -3, \ldots .$$

In diesem Fall enthält die Laurent-Reihe keine negativen Potenzen von $z - a$ und stimmt daher mit der Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{für alle } z \in B_{r_2}(a).$$

überein. Insbesondere gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

- Die Werte der Laurent-Koeffizienten c_n sind unabhängig von Γ.

…gszentrum der Laurent-Reihe.

Lemma: *Die Funktion* f *sei analytisch im Kreisring* $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$. *Weiterhin sei* $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. *Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \textit{für alle } \rho_1 < |z-a| < \rho_2,$$

wobei Γ_1 *der innere und* Γ_2 *der äußere Kreisrand von* $R_{\rho_1}^{\rho_2}$ *ist.*

Beweis: Sei $z \in R_{\rho_1}^{\rho_2}$. Dann gilt (siehe Skizze)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Wegen $\Gamma_3 + \Gamma_4 = \Gamma_2 - \Gamma_1$ folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \end{aligned}$$

Eigenschaften der Laurent-Reihe

Satz (Eindeutigkeitssatz):
Eine in einem Kreisring $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$, $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$, *analytische Funktion* f *kann nur auf eine Weise in* R *durch eine Reihe der Form*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

dargestellt werden, nämlich durch ihre Laurent-Reihe, wobei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

mit einem Weg Γ, *der* $\overline{B_{r_1}(a)}$ *einmal im positiven Sinn umläuft.*

Beweis: Angenommen es gibt eine weitere Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-a)^n \qquad \text{für } z \in R.$$

Dann gilt

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z-a)^n \qquad \text{mit } d_n = c_n - c'_n \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Sei nun $m \in \mathbb{Z}$ und $\Gamma \in R$ ein positiv orientierter Kreis um a.

Dann gilt (durch Multiplikation mit $(z-a)^{-m-1}$ und Integration längs Γ)

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \int_\Gamma (z-a)^{n-m-1}\, dz$$

Wegen

$$\int_\Gamma (z-a)^k\, dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } k = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt daraus $0 = d_m \cdot 2\pi i$ und somit $d_m = 0$, d.h. $c_m = c'_m$.

Da $m \in \mathbb{Z}$ beliebig war, sind die beiden Reihen identisch. 4

Satz (Eindeutigkeitssatz):

Eine in einem Kreisring $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$, $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$, *analytische Funktion* f *kann nur auf eine Weise in* R *durch eine Reihe der Form*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

dargestellt werden, nämlich durch ihre Laurent-Reihe, wobei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

mit einem Weg Γ, *der* $\overline{B_{r_1}(a)}$ *einmal im positiven Sinn umläuft.*

Beweis: Angenommen es gibt eine weitere Darstellung der Form *mit einem Weg* Γ, *der* $B_{r_1}(a)$ *einmal im positiven Sinn umläuft.*

Beweis: Angenommen es gibt eine weitere Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-a)^n \qquad \text{für } z \in R.$$

Dann gilt

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z-a)^n \qquad \text{mit } d_n = c_n - c'_n \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Sei nun $m \in \mathbb{Z}$ und $\Gamma \in R$ ein positiv orientierter Kreis um a.

Dann gilt (durch Multiplikation mit $(z-a)^{-m-1}$ und Integration längs Γ)

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \int_\Gamma (z-a)^{n-m-1}\, dz$$

Wegen

$$\int_\Gamma (z-a)^k\, dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } k = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt daraus $0 = d_m \cdot 2\pi i$ und somit $d_m = 0$, d.h. $c_m = c'_m$.

Da $m \in \mathbb{Z}$ beliebig war, sind die beiden Reihen identisch. 4

Bestimme die Laurent-Reihe der Funktion

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

um den Entwicklungspunkt $a = 1$.

Es gilt

$$\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots$$

und daher mit $w = 1/(1-z)$,

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) &= 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{(1-z)^3} + \dots \\ &= 1 - \frac{(z-1)^{-1}}{1!} + \frac{(z-1)^{-2}}{2!} - \frac{(z-1)^{-3}}{3!} \pm \dots\end{aligned}$$

die Laurent-Reihe von f mit Entwicklungszentrum $a = 1$.

Erinnerung

Eigenschaften der Laurent-Reihe

Taylor Reihe

Komplexe Funktionen

Laurent Reihe

Satz von Liouville

Cauchysche Koeffizienten Abschätzungsformel