Komplexe Funktionen

18.06.2018

J. Behrens

① Beispiele:

a) • Betrachte $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$

• f besitzt in $z=0$ isolierte Singularität.

• Laurent-Reihe von f: (Verwende Taylor-Reihe für sin)

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

• Da keine negativen Indizes in der Reihendarstellung vorkommen ist $z=0$ eine hebbare Singularität.

b) • Betrachte $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

• f besitzt in $z=i$ eine isolierte Singularität (eine weitere in $z=-i$)

• Es gilt: $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(z-i)} \frac{1}{z-i+2i}$

$$= \frac{1}{z-i} \frac{1}{2i\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)} = \frac{1}{2i} \frac{1}{(z-i)} \frac{1}{1-\frac{i}{2}(z-i)}$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} \left(1 + \frac{i}{2}(z-i) + \left(\frac{i}{2}\right)^2 (z-i)^2 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2i}(z-i)^{-1} + \frac{1}{2^2}(z-i)^0 + \frac{i}{2^3}(z-i)^1 + \dots$$

- In der Reihendarstellung existiert ein Koeff. mit neg. Index, also ist $z = i$ ein Pol von der Ordnung 1.

c) - Betrachte: $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$

- f besitzt in $z = 1$ eine isolierte Singularität.
- Laurent-Reihe:

$$\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) = 1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} \pm \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{1!}(z-1)^{-1} + \frac{1}{2!}(z-1)^{-2} - \frac{1}{3!}(z-1)^{-3} \pm \dots$$

- Diese Reihe enthält unendlich viele Glieder mit negativen Potenzen von $(z-1)$, also ist $z = 1$ wesentliche Singularität.

② „Beweis":

- Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, p, q Polynome, rationale Fkt.
- Sei z_0 Nullstelle der Ordnung m von $q(z)$, so dass

$$q(z) = (z-z_0)^m \, q_1(z)$$

für ein Polynom $q_1(z)$ mit $q_1(z_0) \neq 0$

- Es gilt dann:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \, \frac{p(z)}{q_1(z)}$$

- Da $q_1(z_0) \neq 0$ kann man $\frac{p(z)}{q_1(z)}$ um z_0 in Taylor-Reihe entwickelt werden

$$\frac{p(z)}{q_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

- Diese Taylor-Reihe konvergiert für ein $r>0$ in $B_r(z_0)$
- Daraus ergibt sich die Laurent-Reihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-m} = \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots$$

Diese Reihe konvergiert im Kreisring $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$

- wegen dieser Laurent-Reihendarstellung ist z_0

$$\begin{cases} \text{ein Pol der Ordnung } m \ (m \geq 1) \\ \text{hebbare Singularität} \end{cases}$$

aber keine wesentliche Singularität $(m \neq \infty)$.