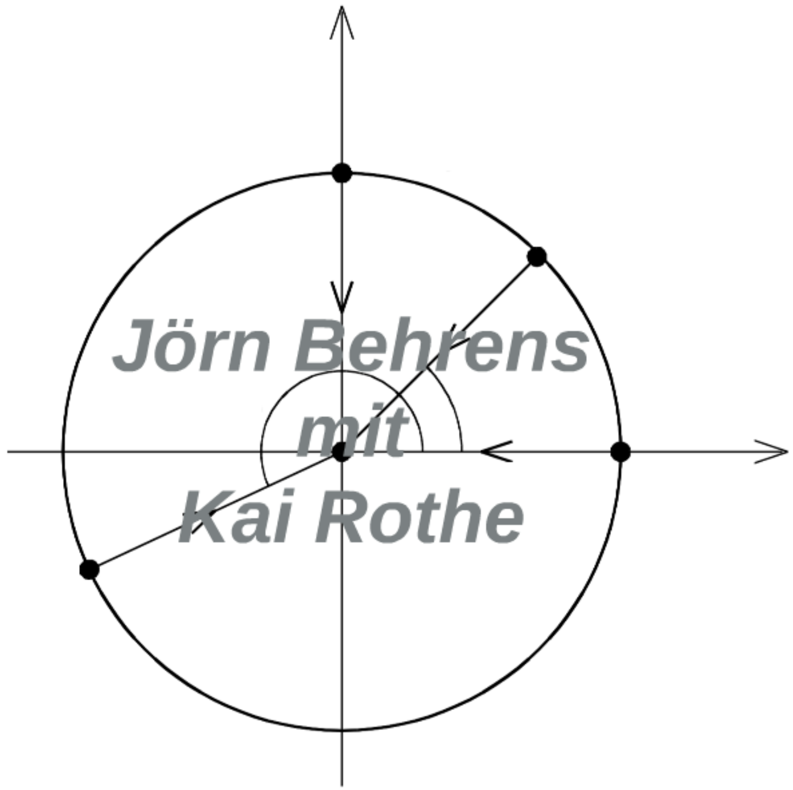
Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Singularitäten

Erinnerung

Satz: (Taylor-Reihe)
Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. Dann konvergiert die Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

gegen $f(z)$ für alle z innerhalb des größten Kreises um a, dessen inneres ganz in G enthalten ist ($z \in B_r(a) \subset G$).

Satz: (Eindeutigkeit der Taylor-Reihe)
Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. In einer Umgebung von a gelte für $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

mit komplexen Konstanten $c_n \in \mathbb{C}$ für $n = 1, 2, \ldots$ Dann gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

d.h. die obige Reihe *ist* die Taylor-Reihe von f um a.

Satz: (Laurent-Reihenentwicklung)
Sei f analytisch im Kreisring $R = R_{r_1}^{r_2}(a)$ und sei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

wobei $\Gamma \subset R$ eine beliebige Kurve ist, die $B_{r_1}(a)$ einmal im positiven Sinne umläuft.
Dann gilt die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad \forall z \in R.$$

Definition: (Laurent-Reihe)
Die eben definierte Reihe heißt Laurent-Reihe von f in R.
Weiterhin heißt a das Entwicklungszentrum der Laurent-Reihe.

Satz (Eindeutigkeitssatz):
Eine in einem Kreisring $R = R_{r_1}^{r_2}(a)$, $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$, *analytische Funktion* f *kann nur auf eine Weise in* R *durch eine Reihe der Form*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

dargestellt werden, nämlich durch ihre Laurent-Reihe, wobei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

mit einem Weg Γ, *der* $\overline{B_{r_1}(a)}$ *einmal im positiven Sinn umläuft.*

Satz: (Taylor-Reihe)
Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. Dann konvergiert die Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

gegen $f(z)$ für alle z innerhalb des größten Kreises um a, dessen inneres ganz in G enthalten ist ($z \in B_r(a) \subset G$).

Satz: (Eindeutigkeit der Taylor-Reihe)
Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. In einer Umgebung von a gelte für $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit komplexen Konstanten $c_n \in \mathbb{C}$ für $n = 1, 2, \ldots$ Dann gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

d.h. die obige Reihe *ist* die Taylor-Reihe von f um a.

Satz: (Laurent-Reihenentwicklung)
Sei f analytisch im Kreisring $R = R_{r_1}^{r_2}(a)$ und sei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

wobei $\Gamma \subset R$ eine beliebige Kurve ist, die $B_{r_1}(a)$ einmal im positiven Sinne umläuft.
Dann gilt die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in R.$$

Definition: (Laurent-Reihe)
Die eben definierte Reihe heißt Laurent-Reihe von f in R.
Weiterhin heißt a das Entwicklungszentrum der Laurent-Reihe.

Satz (Eindeutigkeitssatz):
Eine in einem Kreisring $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$, $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$, *analytische Funktion* f *kann nur auf eine Weise in* R *durch eine Reihe der Form*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

dargestellt werden, nämlich durch ihre Laurent-Reihe, wobei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

mit einem Weg Γ, *der* $\overline{B_{r_1}(a)}$ *einmal im positiven Sinn umläuft.*

Isolierte Singularität

Definition: (isolierte Singularität)
Sei eine analytische Funktion f definiert in einem Kreisring

$$B_r(a)\backslash\{a\} = \{z \in \mathbb{C}:\ 0 < |z-a| <\},$$

wobei $r > 0$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt a isolierte Singularität.

Beispiele:

- $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ besitzt in $z = 0$ eine isolierte Singularität.
- $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ besitzt in $z = \pm i$ isolierte Singularitäten.
- $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$ besitzt in $z = 1$ eine isolierte Singularität.

Beispiel:

- Der komplexe Logarithmus $\mathrm{Log}(z)$ ist in $\{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ nicht definiert. Daher ist $z = 0$ keine isolierte Singularität!

Erinnerung:

- Sei f analytisch in $B_r(a)\backslash\{a\}$ mit isolierter Singularität in a.
- f kann in $B_r(a)\backslash\{a\}$ in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n.$$

Definition: f besitze in $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität. Dann heißt a

- eine hebbare Singularität von f, falls in der Laurent-Reihe alle Koeffizienten c_n mit $n < 0$ verschwinden;
- ein Pol der Ordnung m von f, falls in der Laurent-Reihe nur endlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind und $-m$ die kleinste Zahl ist mit $c_{-m} \neq 0$;
- eine wesentliche Singularität von f, falls in der Laurent-Reihe unendlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind.

Singularität

Definition: (isolierte Singularität)
Sei eine analytische Funktion f definiert in einem Kreisring

$$B_r(a)\backslash\{a\} = \{z \in \mathbb{C} : \; 0 < |z-a| <\},$$

wobei $r > 0$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt a isolierte Singularität.

Beispiele:

- $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ besitzt in $z = 0$ eine isolierte Singularität.

Beispiele:

- $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ besitzt in $z = 0$ eine isolierte Singularität.
- $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ besitzt in $z = \pm i$ isolierte Singularitäten.
- $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$ besitzt in $z = 1$ eine isolierte Singularität.

Beispiel:

- Der komplexe Logarithmus $\mathrm{Log}(z)$ ist in $\{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ nicht definiert. Daher ist $z = 0$ keine isolierte Singularität!

Erinnerung:

- Sei f analytisch in $B_r(a)\backslash\{a\}$ mit isolierter Singularität in a.
- f kann in $B_r(a)\backslash\{a\}$ in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n.$$

Definition: f besitze in $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität. Dann heißt a

- eine hebbare Singularität von f, falls in der Laurent-Reihe alle Koeffizienten c_n mit $n < 0$ verschwinden;
- ein Pol der Ordnung m von f, falls in der Laurent-Reihe nur endlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind und $-m$ die kleinste Zahl ist mit $c_{-m} \neq 0$;
- eine wesentliche Singularität von f, falls in der Laurent-Reihe unendlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind.

1

Eigenschaften isolierter Singularitäten

Beobachtung: (Singularitäten rationaler Funktionen nie wesentlich)
Sei f eine rationale Funktion, d.h.

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad \text{mit } p(z), q(z) \text{ Polynomen.}$$

Dann besitzt f nur bei den Nullstellen von q isolierte Singularitäten.
Diese Singularitäten sind nie wesentlich.

2

Satz: (Satz von Riemann)
Die Funktion f besitze in a eine isolierte Singularität. Falls f in einem Kreisring $B_r(a)\backslash\{a\}$ beschränkt ist, so ist a eine hebbare Singularität von f.

Beweis: Sei f beschränkt in $B_r(a) \setminus \{a\}$ mit $|f(z)| \le M$. Für die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

verschwinden alle c_n mit $n < 0$, denn es gilt die Abschätzung

$$|c_n| \le \frac{M}{\rho^n} = M\rho^{-n} \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Für $n < 0$ bekommt man für $\rho \to 0$ den Grenzwert Null.

Somit gilt $c_n = 0$ für alle $n < 0$.

Satz: (Werteverhalten bei hebbaren Singularitäten)
Sei f eine analytisch im Kreisring $B_r(a)\backslash\{a\}$ und sei a eine hebbare Singularität von f. Dann existiert der Grenzwert

$$\alpha := \lim_{z \to a} f(z).$$

Mit der Definition $f(a) := \alpha$ ist die so erweiterte Funktion f in der vollen Kreisscheibe $B_r(a)$ analytisch.

Beweis: Mit der Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

bekommt man sofort den Grenzwert $\alpha = c_0 = \lim_{z \to a} f(z)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} &= \lim_{z \to a} \frac{c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots - c_0}{z-a} \\ &= \lim_{z \to a} \frac{c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots}{z-a} = c_1. \end{aligned}$$

Folgerung:
Ist eine isolierte Singularität a von f nicht hebbar, so ist f in keiner Umgebung von a beschränkt.

Satz:
Hat f in a einen Pol, so gilt

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty.$$

Beobachtung: (Singularitäten rationaler Funktionen nie wesentlich)
Sei f eine rationale Funktion, d.h.

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad \text{mit } p(z), q(z) \text{ Polynomen.}$$

Dann besitzt f nur bei den Nullstellen von q isolierte Singularitäten.
Diese Singularitäten sind nie wesentlich.

Satz: (Werteverhalten bei hebbaren Singularitäten)
Sei f eine analytisch im Kreisring $B_r(a)\backslash\{a\}$ und sei a eine hebbare Singularität von f. Dann existiert der Grenzwert

$$\alpha := \lim_{z\to a} f(z).$$

Mit der Definition $f(a) := \alpha$ ist die so erweiterte Funktion f in der vollen Kreisscheibe $B_r(a)$ analytisch.

Beweis: Mit der Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

bekommt man sofort den Grenzwert $\alpha = c_0 = \lim_{z\to a} f(z)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} &= \lim_{z\to a} \frac{c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots - c_0}{z-a} \\ &= \lim_{z\to a} \frac{c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots}{z-a} = c_1. \end{aligned}$$

von f nicht hebbar

Satz: (Satz von Riemann)
Die Funktion f besitze in a eine isolierte Singularität. Falls f in einem Kreisring $B_r(a)\backslash\{a\}$ beschränkt ist, so ist a eine hebbare Singularität von f.

Beweis: Sei f beschränkt in $B_r(a) \setminus \{a\}$ mit $|f(z)| \leq M$. Für die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

verschwinden alle c_n mit $n < 0$, denn es gilt die Abschätzung

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} = M\rho^{-n} \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Für $n < 0$ bekommt man für $\rho \to 0$ den Grenzwert Null.

Somit gilt $c_n = 0$ für alle $n < 0$.

Folgerung:

Folgerung:
Ist eine isolierte Singularität a von f nicht hebbar, so ist f in keiner Umgebung von a beschränkt.

Satz:
Hat f in a einen Pol, so gilt

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty.$$

Beweis: Aus der Laurent-Entwicklung von f um a,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \frac{c_{-m+2}}{(z-a)^{m-2}} + \ldots \\ &= \frac{1}{(z-a)^m} \left[c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + c_{-m+2}(z-a)^2 + \ldots\right] \end{aligned}$$

mit $m > 0$ und $c_{-m} \neq 0$, folgt die Behauptung unmittelbar.

Satz von Casorati-Weierstrass

Satz: (Satz von Casorati-Weierstrass)
Die Funktion f besitze in $a \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität.
Dann kommen die Werte von f in jeder Umgebung von a jeder komplexen Zahl beliebig nahe.

Casorati-Weierstrass

Satz: (Satz von Casorati-Weierstrass)
Die Funktion f besitze in $a \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität.
Dann kommen die Werte von f in jeder Umgebung von a jeder komplexen Zahl beliebig nahe.

Beweis: (durch Widerspruch)

- Sei $U = B_r(a)\backslash\{a\}$ eine Umgebung von a (Kreisring).
- Sei $w_0 \in \mathbb{C}$, so dass die Werte von f in U nicht beliebig nahe an w_0 kommen, d.h. es existiert $\epsilon > 0$, so dass

$$|f(z) - w_0| \geq \epsilon \quad \forall z \in U.$$

Beweis: (durch Widerspruch)

- Sei $U = B_r(a)\backslash\{a\}$ eine Umgebung von a (Kreisring).
- Sei $w_0 \in \mathbb{C}$, so dass die Werte von f in U nicht beliebig nahe an w_0 kommen, d.h. es existiert $\epsilon > 0$, so dass

$$|f(z) - w_0| \geq \epsilon \quad \forall z \in U.$$

- Dann ist die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

  für $z \in U$ analytisch und wegen $|g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}$ beschränkt.
- Mit obigem Satz ist dann aber a eine hebbare Singularität von g, so dass in U für $m \geq 0$ gilt

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n}(z-a)^n = (z-a)^m g_1(z).$$

  Dabei ist g_1 in $B_r(a)$ analytisch.
- Daraus folgt die Darstellung von f für $z \in U$

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)} = w_0 + \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{g_1(z)}.$$

- Mit der Taylor-Entwicklung für $z \in U$

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

- Erhalte die Laurent-Reihe von f in U

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots - b_m + w_0 + b_{m+1}(z-a) + \cdots$$

- Dies stellt einen Widerspruch zur Annahme dar, a sei eine wesentliche Singularität.

Hauptteil einer Laurent-Reihe

Definition: (Hauptteil einer Laurent-Reihe)
Sei a isolierte Singularität der Funktion f und sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Laurent-Reihe von f um a. Dann heißt die Funktion

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

der zu a gehörige Hauptteil von f.

Bemerkungen:

- Für eine hebbare Singularität verschindet der Hauptteil.
- Für einen Pol ist der Hauptteil ein Polynom in $\frac{1}{(z-a)}$.

Satz:
Eine rationale Funktion f, die im Unendlichen verschwindet, ist die Summe ihrer Hauptteile:

$$f = h_1 + h_2 + \cdots h_N.$$

Beweis: Sei f rational. Dann ist f in der komplexen Ebene bis auf endlich viele Polstellen $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$ analytisch. Betrachte nun die zugehörigen Hauptteile

$$h_k(z) = \sum_{n=1}^{m_k} \frac{c_{k,n}}{(z-z_k)^n} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, N,$$

von f. Dann ist die Funktion $g := f - \sum_{k=1}^{N} h_k$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$ analytisch.

Da nun für jedes z_k der zugehörige Hauptteil h_k in der Laurent-Reihe von g um z_k wegfällt, ist z_k eine hebbare Singularität von g für $k = 1, \ldots, N$.

Damit ist g eine *ganze* Funktion, d.h. g ist analytisch auf *ganz* $\mathbb{C}$.

Schließlich gilt

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty} f(z) - \sum_{k=1}^{N} \lim_{z\to\infty} h_k(z) = 0,$$

somit ist g beschränkt auf $\mathbb{C}$, nach dem Satz von Liouville konstant mit $g \equiv 0$.

Laurent-Reihe

Definition: (Hauptteil einer Laurent-Reihe)
Sei a isolierte Singularität der Funktion f und sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Laurent-Reihe von f um a. Dann heißt die Funktion

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

der zu a gehörige Hauptteil von f.

Bemerkungen:

Bemerkungen:

- Für eine hebbare Singularität verschindet der Hauptteil.
- Für einen Pol ist der Hauptteil ein Polynom in $\frac{1}{(z-a)}$.

Satz:

Eine rationale Funktion f, die im Unendlichen verschwindet, ist die Summe ihrer Hauptteile:

$$f = h_1 + h_2 + \cdots h_N.$$

Beweis: Sei f rational. Dann ist f in der komplexen Ebene bis auf endlich viele Polstellen $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ analytisch. Betrachte nun die zugehörigen Hauptteile

$$h_k(z) = \sum_{n=1}^{m_k} \frac{c_{kn}}{(z - z_k)^n} \qquad \text{für } k = 1, \dots, N,$$

von f. Dann ist die Funktion $g = f - \sum_{k=1}^{N} h_k$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ analytisch.

Da nun für jedes z_k der zugehörige Hauptteil h_k in der Laurent-Reihe von g um z_k wegfällt, ist z_k eine hebbare Singularität von g, für $k = 1, \dots, N$.

Damit ist g eine ganze Funktion, d.h. g ist analytisch auf ganz $\mathbb{C}$.

Schließlich gilt

$$\lim_{z \to \infty} g(z) = \lim_{z \to \infty} f(z) - \sum_{k=1}^{N} \lim_{z \to \infty} h_k(z) = 0,$$

somit ist g beschränkt auf $\mathbb{C}$, nach dem Satz von Liouville konstant mit $g \equiv 0$.

Erinnerung

Eigenschaften isolierter Singularitäten

Isolierte Singularität

Komplexe Funktionen

Hauptteil einer Laurent-Reihe

Satz von Casorati-Weierstrass