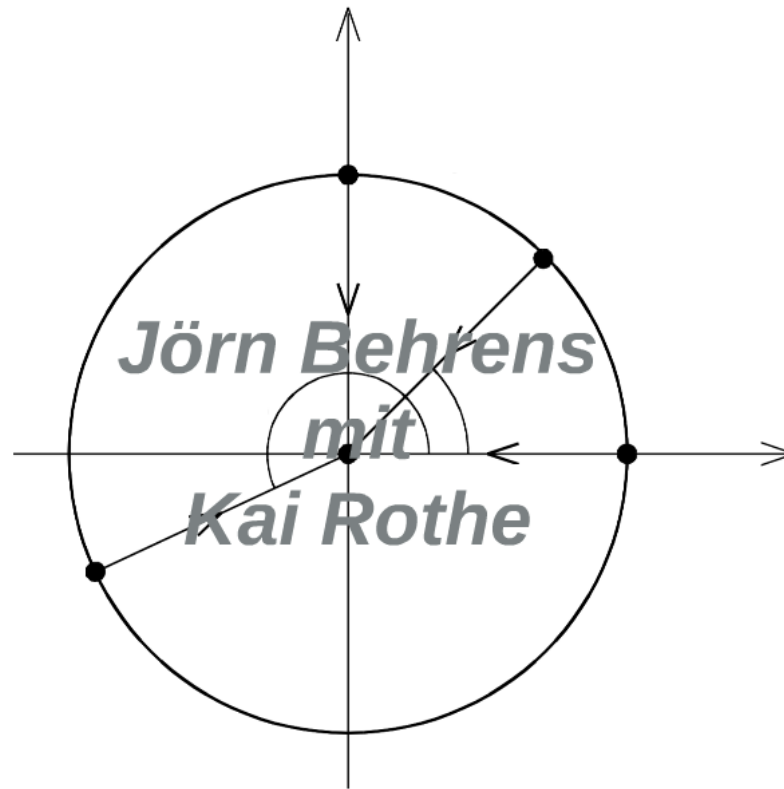


Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Singularitäten

Erinnerung

Satz: (Taylor-Reihe)

Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. Dann konvergiert die **Taylor-Reihe**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

gegen $f(z)$ für alle z innerhalb des größten Kreises um a , dessen inneres ganz in G enthalten ist ($z \in B_r(a) \subset G$).

Satz: (Eindeutigkeit der Taylor-Reihe)

Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. In einer Umgebung von a gelte für $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit komplexen Konstanten $c_n \in \mathbb{C}$ für $n = 1, 2, \dots$. Dann gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

d.h. die obige Reihe ist die Taylor-Reihe von f um a .

Satz: (Laurent-Reihenentwicklung)

Sei f analytisch im Kreisring $R = R_{r_1}^{r_2}(a)$ und sei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

wobei $\Gamma \subset R$ eine beliebige Kurve ist, die $B_{r_1}(a)$ einmal im positiven Sinne umläuft. Dann gilt die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in R.$$

Definition: (Laurent-Reihe)

Die eben definierte Reihe heißt **Laurent-Reihe** von f in R . Weiterhin heißt a das **Entwicklungszentrum** der Laurent-Reihe.

Satz (Eindeutigkeitsatz):

Eine in einem Kreisring $R = R_{r_1}^{r_2}(a)$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, analytische Funktion f kann nur auf eine Weise in R durch eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

dargestellt werden, nämlich durch ihre Laurent-Reihe, wobei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

mit einem Weg Γ , der $B_{r_1}(a)$ einmal im positiven Sinn umläuft.

Satz: (Taylor-Reihe)

Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. Dann konvergiert die **Taylor-Reihe**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

gegen $f(z)$ für alle z innerhalb des größten Kreises um a , dessen inneres ganz in G enthalten ist ($z \in B_r(a) \subset G$).

Satz: (Eindeutigkeit der Taylor-Reihe)

Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. In einer Umgebung von a gelte für $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

mit komplexen Konstanten $c_n \in \mathbb{C}$ für $n = 1, 2, \dots$. Dann gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

d.h. die obige Reihe *ist* die Taylor-Reihe von f um a .

Satz: (Laurent-Reihenentwicklung)

Sei f analytisch im Kreisring $R = R_{r_1}^{r_2}(a)$ und sei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

wobei $\Gamma \subset R$ eine beliebige Kurve ist, die $B_{r_1}(a)$ einmal im positiven Sinne umläuft. Dann gilt die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in R.$$

Definition: (Laurent-Reihe)

Die eben definierte Reihe heißt **Laurent-Reihe** von f in R .

Weiterhin heißt a das **Entwicklungszentrum** der Laurent-Reihe.

Satz (Eindeutigkeitssatz):

Eine in einem Kreisring $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, analytische Funktion f kann nur auf eine Weise in R durch eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

dargestellt werden, nämlich durch ihre Laurent-Reihe, wobei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

mit einem Weg Γ , der $\overline{B_{r_1}(a)}$ einmal im positiven Sinn umläuft.



Isolierte Singularität

Definition: (isolierte Singularität)

Sei eine analytische Funktion f definiert in einem Kreisring

$$B_r(a) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\},$$

wobei $r > 0$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt a **isolierte Singularität**.

Beispiele:

- $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ besitzt in $z = 0$ eine isolierte Singularität.
- $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ besitzt in $z = \pm 1$ isolierte Singularitäten.
- $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z-1}\right)$ besitzt in $z = 1$ eine isolierte Singularität.

Beispiel:

- Der komplexe Logarithmus $\text{Log}(z)$ ist in $\{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ nicht definiert. Daher ist $z = 0$ **keine** isolierte Singularität!

Erinnerung:

- Sei f analytisch in $B_r(a) \setminus \{a\}$ mit isolierter Singularität in a .
- f kann in $B_r(a) \setminus \{a\}$ in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n.$$

Definition: f besitze in $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität. Dann heißt a

- eine **hebbare Singularität** von f , falls in der Laurent-Reihe alle Koeffizienten c_n mit $n < 0$ verschwinden;
- ein **Pol der Ordnung m** von f , falls in der Laurent-Reihe nur endlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind und $-m$ die kleinste Zahl ist mit $c_{-m} \neq 0$;
- eine **wesentliche Singularität** von f , falls in der Laurent-Reihe unendlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind. ❶

Definition: (isolierte Singularität)

Sei eine analytische Funktion f definiert in einem Kreisring

$$B_r(a) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\},$$

wobei $r > 0$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt a **isolierte Singularität**.

Beispiele:

- $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ besitzt in $z = 0$ eine isolierte Singularität.

Beispiele:

- $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ besitzt in $z = 0$ eine isolierte Singularität.
- $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ besitzt in $z = \pm i$ isolierte Singularitäten.
- $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$ besitzt in $z = 1$ eine isolierte Singularität.

Beispiel:

- Der komplexe Logarithmus $\text{Log}(z)$ ist in $\{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ nicht definiert. Daher ist $z = 0$ **keine** isolierte Singularität!

Erinnerung:

- Sei f analytisch in $B_r(a) \setminus \{a\}$ mit isolierter Singularität in a .
- f kann in $B_r(a) \setminus \{a\}$ in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n.$$

Definition: f besitze in $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität. Dann heißt a

- eine **hebbare Singularität** von f , falls in der Laurent-Reihe alle Koeffizienten c_n mit $n < 0$ verschwinden;
- ein **Pol der Ordnung m** von f , falls in der Laurent-Reihe nur endlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind und $-m$ die kleinste Zahl ist mit $c_{-m} \neq 0$;
- eine **wesentliche Singularität** von f , falls in der Laurent-Reihe unendlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind.

Eigenschaften isolierter Singularitäten

Beobachtung: (Singularitäten rationaler Funktionen nie wesentlich)

Sei f eine **rationale Funktion**, d.h.

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad \text{mit } p(z), q(z) \text{ Polynomen.}$$

Dann besitzt f nur bei den Nullstellen von q isolierte Singularitäten.
Diese Singularitäten sind nie wesentlich.

2

Satz: (Satz von Riemann)

Die Funktion f besitze in a eine isolierte Singularität. Falls f in einem Kreisring $B_r(a) \setminus \{a\}$ beschränkt ist, so ist a eine hebbare Singularität von f .

Beweis: Sei f beschränkt in $B_r(a) \setminus \{a\}$ mit $|f(z)| \leq M$. Für die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

verschwinden alle c_n mit $n < 0$, denn es gilt die Abschätzung

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} = M \rho^{-n} \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Für $n < 0$ bekommt man für $\rho \rightarrow 0$ den Grenzwert Null.

Somit gilt $c_n = 0$ für alle $n < 0$.

Satz: (Werteverhalten bei hebbaren Singularitäten)

Sei f eine analytisch im Kreisring $B_r(a) \setminus \{a\}$ und sei a eine hebbare Singularität von f . Dann existiert der Grenzwert

$$\alpha := \lim_{z \rightarrow a} f(z).$$

Mit der Definition $f(a) := \alpha$ ist die so erweiterte Funktion f in der vollen Kreisscheibe $B_r(a)$ analytisch.

Beweis: Mit der Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

bekommt man sofort den Grenzwert $\alpha = c_0 = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$. Weiterhin gilt

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots - c_0}{z-a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots}{z-a} = c_1.$$

Folgerung:

Ist eine isolierte Singularität a von f nicht hebbar, so ist f in keiner Umgebung von a beschränkt.

Satz:

Hat f in a einen Pol, so gilt

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$

Beweis: Sei f eine Funktion mit einem Pol in a .

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}, \quad \text{mit } g(z) \text{ analytisch in } a \text{ und } g(a) \neq 0.$$
 Dann gilt $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.

Singulartypen

Beobachtung: (Singularitäten rationaler Funktionen nie wesentlich)
Sei f eine **rationale Funktion**, d.h.

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad \text{mit } p(z), q(z) \text{ Polynomen.}$$

Dann besitzt f nur bei den Nullstellen von q isolierte Singularitäten.
Diese Singularitäten sind nie wesentlich.

Satz: (Werteverhalten bei hebbaren Singularitäten)

Sei f eine analytisch im Kreisring $B_r(a) \setminus \{a\}$ und sei a eine hebbare Singularität von f . Dann existiert der Grenzwert

$$\alpha := \lim_{z \rightarrow a} f(z).$$

Mit der Definition $f(a) := \alpha$ ist die so erweiterte Funktion f in der vollen Kreisscheibe $B_r(a)$ analytisch.

Beweis: Mit der Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

bekommt man sofort den Grenzwert $\alpha = c_0 = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots - c_0}{z - a} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots}{z - a} = c_1. \end{aligned}$$



Satz: (Satz von Riemann)

Die Funktion f besitze in a eine isolierte Singularität. Falls f in einem Kreisring $B_r(a) \setminus \{a\}$ beschränkt ist, so ist a eine hebbare Singularität von f .

Beweis: Sei f beschränkt in $B_r(a) \setminus \{a\}$ mit $|f(z)| \leq M$. Für die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

verschwinden alle c_n mit $n < 0$, denn es gilt die Abschätzung

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} = M\rho^{-n} \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Für $n < 0$ bekommt man für $\rho \rightarrow 0$ den Grenzwert Null.

Somit gilt $c_n = 0$ für alle $n < 0$.

Folgerung:

Folgerung:

Ist eine isolierte Singularität a von f nicht hebbar, so ist f in keiner Umgebung von a beschränkt.

Satz:

Hat f in a einen Pol, so gilt

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$

Beweis: Aus der Laurent-Entwicklung von f um a ,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \frac{c_{-m+2}}{(z-a)^{m-2}} + \dots \\ &= \frac{1}{(z-a)^m} [c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + c_{-m+2}(z-a)^2 + \dots] \end{aligned}$$

mit $m > 0$ und $c_{-m} \neq 0$, folgt die Behauptung unmittelbar.

Satz von Casorati-Weierstrass

Satz: (Satz von Casorati-Weierstrass)

Die Funktion f besitze in $a \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität.

Dann kommen die Werte von f in jeder Umgebung von a jeder komplexen Zahl beliebig nahe.

Beweis: (durch Widerspruch)

- Sei $z = z_0 + iy_0$ eine Umgebung von $a \in \mathbb{C}$.
- Sei $w \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir zeigen, dass $f(z)$ beliebig nahe bei w kommen kann.

• Dann sei die Funktion
$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

Sei $z \in D$ und z liegt in $z_0 + iy_0$. Dann gilt:

- Mit dem Satz von Cauchy-Schwarz folgt: $|g(z)| \leq \frac{1}{|f(z) - w|}$

$$|g(z)| = \left| \frac{1}{f(z) - w} \right| = \frac{1}{|f(z) - w|} = \frac{1}{|f(z) - w|}$$

Dann gilt $|g(z)| \leq \frac{1}{|f(z) - w|}$.

- Dann folgt die Darstellung $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$.

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} = w + \frac{1}{g(z)}$$

- Mit der Taylor-Entwicklung $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- Mit dem Cauchy-Schwarz folgt:

$$|g(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n$$

- Es folgt $|g(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n$ und $|g(z)| \leq \frac{1}{|f(z) - w|}$

Casorati-Weierstrass

Satz: (Satz von Casorati-Weierstrass)

Die Funktion f besitze in $a \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität.

Dann kommen die Werte von f in jeder Umgebung von a jeder komplexen Zahl beliebig nahe.

Beweis: (durch Widerspruch)

- Sei $U = B_r(a) \setminus \{a\}$ eine Umgebung von a (Kreisring).
- Sei $w_0 \in \mathbb{C}$, so dass die Werte von f in U **nicht** beliebig nahe an w_0 kommen, d.h. es existiert $\epsilon > 0$, so dass

$$|f(z) - w_0| \geq \epsilon \quad \forall z \in U.$$

Beweis: (durch Widerspruch)

- Sei $U = B_r(a) \setminus \{a\}$ eine Umgebung von a (Kreising).
- Sei $w_0 \in \mathbb{C}$, so dass die Werte von f in U **nicht** beliebig nahe an w_0 kommen, d.h. es existiert $\epsilon > 0$, so dass

$$|f(z) - w_0| \geq \epsilon \quad \forall z \in U.$$

- Dann ist die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

für $z \in U$ analytisch und wegen $|g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}$ beschränkt.

- Mit obigem Satz ist dann aber a eine hebbare Singularität von g , so dass in U für $m \geq 0$ gilt

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} (z-a)^n = (z-a)^m g_1(z).$$

Dabei ist g_1 in $B_r(a)$ analytisch.

- Daraus folgt die Darstellung von f für $z \in U$

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)} = w_0 + \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{g_1(z)}.$$

- Mit der Taylor-Entwicklung für $z \in U$

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

- Erhalte die Laurent-Reihe von f in U

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots - b_m + w_0 + b_{m+1}(z-a) + \cdots$$

- Dies stellt einen Widerspruch zur Annahme dar, a sei eine wesentliche Singularität.

Hauptteil einer Laurent-Reihe

Definition: (Hauptteil einer Laurent-Reihe)

Sei a isolierte Singularität der Funktion f und sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

Laurent-Reihe von f um a . Dann heißt die Funktion

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$$

der zu a gehörige **Hauptteil** von f .

Bemerkungen:

- Für eine hebbare Singularität verschwindet der Hauptteil.
- Für einen Pol ist der Hauptteil ein Polynom in $\frac{1}{(z-a)^k}$.

Satz:

Eine rationale Funktion f , die im Unendlichen verschwindet, ist die Summe ihrer Hauptteile:

$$f = h_1 + h_2 + \dots + h_N.$$

Beweis: Sei f rational. Dann ist f ein Quotient zweier Polynome auf endlich vielen Punkten $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ zerlegt. Betrachte die zugehörigen Hauptteile

$$h_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{kj}}{(z-a_k)^j} \quad \text{für } k=1, \dots, N.$$

von f . Dann ist die Funktion $g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^N h_k(z)$ holomorph. Da man für jedes der zugehörigen Hauptteile h_k den Limes $\lim_{z \rightarrow a_k} (z-a_k)^{m_k} g(z)$ bilden kann, sind die isolierten Singularitäten a_k für $k=1, \dots, N$ für g keine wesentlichen Singularitäten. Daher ist g eine ganze Funktion, d.h. g ist ein Polynom $g(z) = p(z)$.

Sei $d < \deg p$. gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^d g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^d p(z) = \sum_{k=1}^N \lim_{z \rightarrow \infty} z^d h_k(z) = 0$$

weil die Hauptteile h_k auf \mathbb{C} nach dem Satz von Liouville konstant sind $g(z) = 0$.



Definition: (Hauptteil einer Laurent-Reihe)

Sei a isolierte Singularität der Funktion f und sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

Laurent-Reihe von f um a . Dann heißt die Funktion

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n$$

der zu a gehörige **Hauptteil** von f .

Bemerkungen:

Bemerkungen:

- Für eine hebbare Singularität verschwindet der Hauptteil.
- Für einen Pol ist der Hauptteil ein Polynom in $\frac{1}{(z-a)}$.

Satz:

Eine rationale Funktion f , die im Unendlichen verschwindet, ist die Summe ihrer Hauptteile:

$$f = h_1 + h_2 + \cdots + h_N.$$

Beweis: Sei f rational. Dann ist f in der komplexen Ebene bis auf endlich viele Polstellen $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ analytisch. Betrachte nun die zugehörigen Hauptteile

$$h_k(z) = \sum_{n=1}^{m_k} \frac{c_{kn}}{(z - z_k)^n} \quad \text{für } k = 1, \dots, N,$$

von f . Dann ist die Funktion $g = f - \sum_{k=1}^N h_k$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ analytisch.

Da nun für jedes z_k der zugehörige Hauptteil h_k in der Laurent-Reihe von g um z_k wegfällt, ist z_k eine hebbare Singularität von g , für $k = 1, \dots, N$.

Damit ist g eine ganze Funktion, d.h. g ist analytisch auf ganz \mathbb{C} .

Schließlich gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) - \sum_{k=1}^N \lim_{z \rightarrow \infty} h_k(z) = 0,$$

somit ist g beschränkt auf \mathbb{C} , nach dem Satz von Liouville konstant mit $g \equiv 0$.

Erinnerung

Definition (Einfachheit)
Eine Funktion f heißt **einfach**, wenn sie in einem Punkt a genau eine Nullstelle besitzt, d.h. $f(a) = 0$ und $f'(a) \neq 0$.

Definition (Pol)
Eine Funktion f hat einen **Pol** in a , wenn f in a nicht regulär ist, d.h. f in a nicht als Potenzreihe darstellbar ist.

Definition (Nullstelle)
Eine Funktion f hat eine **Nullstelle** in a , wenn $f(a) = 0$.

Definition (Polordnung)
Die **Polordnung** n einer Funktion f in a ist die kleinste natürliche Zahl n , für die f in a als $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$ mit einer in a regulären Funktion g dargestellt werden kann, die $g(a) \neq 0$ ist.

Komplexe Funktionen

Definition
Beispiel
Eigenschaften

Eigenschaften isolierter Singularitäten

Definition (Isolierte Singularität)
Eine Funktion f hat eine **isolierte Singularität** in a , wenn f in a nicht regulär ist, aber in einer Umgebung U von a (außer in a) regulär ist.

Satz (Riemann)
Ist f in a eine isolierte Singularität, so ist f in a entweder regulär, hat einen Pol oder eine wesentliche Singularität.

Satz (Morera)
Ist f in einer Umgebung U von a (außer in a) regulär und f in a regulär, so ist f in a regulär.

Isolierte Singularität

Definition (Isolierte Singularität)
Eine Funktion f hat eine **isolierte Singularität** in a , wenn f in a nicht regulär ist, aber in einer Umgebung U von a (außer in a) regulär ist.

Satz (Riemann)
Ist f in a eine isolierte Singularität, so ist f in a entweder regulär, hat einen Pol oder eine wesentliche Singularität.

Hauptteil einer Laurent-Reihe

Definition (Hauptteil)
Der **Hauptteil** einer Laurent-Reihe ist der Teil der Reihe, der die negativen Potenzen von z enthält.

Satz (Residuensatz)
Das **Residuum** einer Funktion f in a ist der Koeffizient c_{-1} des Hauptteils der Laurent-Reihe von f in a .

Satz von Casorati-Weierstrass

Satz von Casorati-Weierstrass
Ist f in a eine wesentliche Singularität, so ist f in jeder Umgebung U von a (außer in a) dicht in \mathbb{C} .

