Komplexe Funktionen

25.06.2018

J. Behrens

① Residuum am Pol erster Ordnung von f:

- Sei a Pol erster Ordnung von f
- f besitzt dann die Laurent-Reihendarstellung

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

- Daher gilt:

$$(z-a)f(z) = c_{-1} + c_0(z-a) + c_1(z-a)^2 + c_2(z-a)^2 + \dots$$

- In einer Umgebung von a gilt für $z \to a$:

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

② Beispiele:

a) • einfaches Beispiel $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

- Residuum $z = i$: $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit $p(z) = 1$, $q(z) = 1+z^2$
- Es gilt mit der Folgerung:

$$\operatorname{Res} f(i) = \frac{p(i)}{q'(i)} = \frac{1}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}.$$

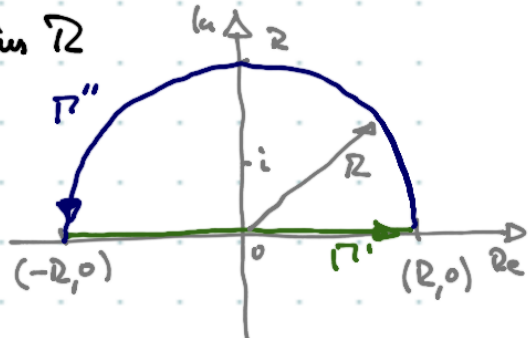
b) <u>Anwendung des Residuensatzes</u>: Berechne uneigentliches (reelles) Integral

- Betrachte: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$
- Setze: $I_R = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ für $R>0$, so dass $\lim_{R\to\infty} I_R = I$
- Schreibe das reelle Integral I_R als komplexes Integral

$$I_R = \int_{\Gamma'} f(z)\,dz$$

mit $\Gamma' = [-R,R] \subset \mathbb{C}$ Integrationsweg und $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ analytisch

- Sei Γ'' der Halbkreis um Null mit Radius R
- Dann gilt $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$



$$\int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int_{\Gamma'} \frac{1}{1+z^2}\,dz + \int_{\Gamma''} \frac{1}{1+z^2}\,dz = I_R + J_R$$

- Für $R>1$ gilt $|1+z^2| \geq R^2-1$ auf Γ''

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{R^2-1} \qquad (z \in \Gamma'')$$

- Daher $|J_R| = \left|\int_{\Gamma''} \frac{1}{1+z^2}\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}$
- Es folgt $\lim_{R\to\infty} J_R = 0$ und damit $I = I_R = \int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2}\,dz$
- ...

- Berechne mit Residuensatz:

$$I = \int_\Gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} f(i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

- Alternativ: elementare Berechnung mit Mitteln der reellen Analysis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \arctan(x)\Big|_{-R}^{R}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$