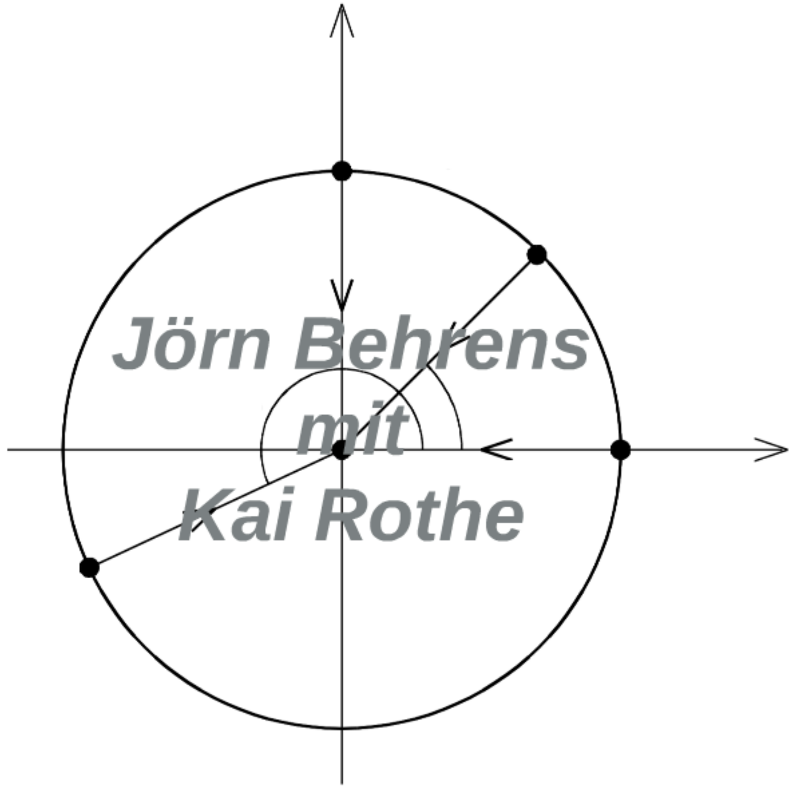
Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Residuensatz

Erinnerung

Definition: (Komplexes Kurvenintegral)
Falls für jede Zerlegungsfolge $z_0, \dots, z_n$ für Γ mit

$$\max_{0 \le k < n} |\Delta z_k| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

und jede Wahl von Zwischenpunkten $\zeta_k \in \Gamma|_{[z_k, z_{k+1}]}$ der Grenzwert der Partialsummen existiert und jeweils den selben Wert ergibt, so wird der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k =: \int_\Gamma f(z)\, dz$$

als Integral der Funktion f längs der Kurve Γ bezeichnet.
Man spricht vom komplexen Kurvenintegral des Integranden f auf dem Integrationsweg Γ.

"Rezept" zur Integralberechnung

Aufgabe: Berechne komplexes Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f(z)\, dz$$

Lösungsweg:

(a) Stelle den Integrationsweg Γ in Parameterform dar

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \qquad \text{für } \alpha \le t \le \beta$$

(b) Substituiere im Integral $z = z(t)$, somit $dz = z'(t)\, dt$;

(c) Ersetze den Integrationsweg Γ durch die reellen Grenzen α und β.

(d) Berechne das Integral

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\, dt.$$

Satz: (Hauptsatz der komplexen Integralrechnung)
Sei f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und sei $z_0 \in G$.
Dann ist die Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

für $z \in G$ analytisch und es gilt

$$F'_{z_0} = f \quad \text{auf } G.$$

Definition: (Stammfunktion)
Sei F analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G mit $F' = f$.
Dann heißt F Stammfunktion von f auf G.

Satz: (Cauchyscher Integralsatz)
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset D$ analytisch.
Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Also: das Integral längs geschlossener Kurven in G ist Null.

Satz: (Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes)
Sei f analytisch in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet G mit Loch L.
Dann besitzt das Integral

$$\int_\Gamma f(z)\, dz$$

längs jeder geschlossenen Kurve in G, die L einmal im positiven Sinne umläuft, denselben Wert.
Bemerkung: Diese Aussage lässt sich analog auf mehrfach zusammenhängende Gebiete verallgemeinern.

Definition: (Komplexes Kurvenintegral)
Falls für jede Zerlegungsfolge $z_0, \ldots, z_n$ für Γ mit

$$\max_{0 \le k < n} |\Delta z_k| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

und jede Wahl von Zwischenpunkten $\zeta_k \in \Gamma|_{[z_k, z_{k+1}]}$ der Grenzwert der Partialsummen existiert und jeweils den selben Wert ergibt, so wird der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k =: \int_\Gamma f(z)\, dz$$

als Integral der Funktion f längs der Kurve Γ bezeichnet.
Man spricht vom komplexen Kurvenintegral des Integranden f auf dem Integrationsweg Γ.

"Rezept" zur Integralberechnung

Aufgabe: Berechne komplexes Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f(z)\,dz$$

Lösungsweg:

(a) Stelle den Integrationsweg Γ in Parameterform dar

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \qquad \text{für } \alpha \le t \le \beta$$

(b) Substituiere im Integral $z = z(t)$, somit $dz = z'(t)\,dt$;

(c) Ersetze den Integrationsweg Γ durch die reellen Grenzen α und β.

(d) Berechne das Integral

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt.$$

$\int_\Gamma f(z)\, dz =$

Satz: (Hauptsatz der komplexen Integralrechnung)
Sei f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und sei $z_0 \in G$.
Dann ist die Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

für $z \in G$ analytisch und es gilt

$$F'_{z_0} = f \quad \text{auf } G.$$

Definition: (Stammfunktion)
Sei F analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G mit $F' = f$.
Dann heißt F Stammfunktion von f auf G.

Satz: (Cauchyscher Integralsatz)

Satz: (Cauchyscher Integralsatz)
Sei $f : D \to W$ auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset D$ analytisch.
Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Also: das Integral längs geschlossener Kurven in G ist Null.

Satz: (Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes)
Sei f analytisch in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet G mit Loch L.
Dann besitzt das Integral

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz$$

längs jeder geschlossenen Kurve in G, die L einmal im positiven Sinne umläuft, denselben Wert.

Bemerkung: Diese Aussage lässt sich analog auf mehrfach zusammenhängende Gebiete verallgemeinern.

Vorbemerkungen

Vorbemerkung: (Integrale mit zwei Löchern) Wir erinnern uns:

- Sei f analytisch in Gebiet G mit zwei (disjunkten) Löchern L_1 und L_2.
- Sei $\Gamma \subset G$ positiv orientierte Kurve um L_1 und L_2.
- Seien Γ' und Γ'' zwei Kurven mit $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ wobei
  - Γ' umläuft L_1 einmal im positiven Sinn (aber nicht L_2),
  - Γ'' umläuft L_2 einmal im positiven Sinn (aber nicht L_1).
- Dann gilt für beliebige geschlossene Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$, die jeweils nur L_1 bzw. L_2 einmal im positiven Sinn umlaufen:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma'} f(z)\,dz \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma''} f(z)\,dz.$$

- Außerdem gilt mit $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Verallgemeinerung:

- Sei f analytisch in Gebiet G mit N (disjunkten) Löchern $L_1, \ldots, L_N$.
- Sei $\Gamma \subseteq G$ positiv orientierte Kurve um $L_1, \ldots, L_N$.
- Seien $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N \subset G$ geschlossene Kurven, für die gelte ($k = 1, \ldots, N$):
  - Γ_k umläuft L_k einmal im positiven Sinn, aber keines der L_i ($i \neq k$).
- Dann gilt:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz.$$

- **Bemerkung:** Die Formel gilt insbesondere, falls L_k zu jeweils Punkten $z_k \in G$ zusammenfallen (d.h. f besitzt isolierte Singularitäten $z_1, \ldots, z_N$).

Bemerkung: (Laurent-Koeffizient c_{-1})

- Die Laurent-Reihe von $f(z)$ um z_k lautet

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_k)^n, \quad \text{für } 0 < |z - z_k| < r$$

- Die Koeffizienten c_n lassen sich darstellen:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f(z)}{(z - z_k)^{n+1}}\,dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- Insbesondere gilt:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz \Rightarrow \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot c_{-1}.$$

Vorbemerkung: (Integrale mit zwei Löchern) Wir erinnern uns:

- Sei f analytisch in Gebiet G mit zwei (disjunkten) Löchern L_1 und L_2.
- Sei $\Gamma \subset G$ positiv orientierte Kurve um L_1 und L_2.
- Seien Γ' und Γ'' zwei Kurven mit $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ wobei
  - Γ' umläuft L_1 einmal im positiven Sinn (aber nicht L_2),
  - Γ'' umläuft L_2 einmal im positiven Sinn (aber nicht L_1).
- Dann gilt für beliebige geschlossene Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$, die jeweils nur L_1 bzw. L_2 einmal im positiven Sinn umlaufen:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\Gamma'} f(z)\, dz \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\Gamma''} f(z)\, dz.$$

- Außerdem gilt mit $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz.$$

Verallgemeinerung:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Verallgemeinerung:

- Sei f analytisch in Gebiet G mit N (disjunkten) Löchern $L_1, \ldots, L_N$.
- Sei $\Gamma \subset G$ positiv orientierte Kurve um $L_1, \ldots, L_N$.
- Seien $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N \subset G$ geschlossene Kurven, für die gelte ($k = 1, \ldots, N$):
  - Γ_k umläuft L_k einmal im positiven Sinn, aber keines der L_i ($i \neq k$).
- Dann gilt:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz.$$

- **Bemerkung:** Die Formel gilt insbesondere, falls L_k zu jeweils Punkten $z_k \in G$ zusammenfallen (d.h. f besitzt isolierte Singularitäten $z_1, \ldots, z_N$).

Bemerkung: (Laurent-Koeffizient c_{-1})

- Die Laurent-Reihe von $f(z)$ um z_0 lautet zusammenfallen (d.h. f besitzt isolierte Singularitäten $z_1, \ldots, z_N$).

Bemerkung: (Laurent-Koeffizient c_{-1})

- Die Laurent-Reihe von $f(z)$ um z_k lautet

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_k)^n, \quad \text{für } 0 < |z - z_k| < r$$

- Die Koeffizienten c_n lassen sich darstellen:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f(z)}{(z - z_k)^{n+1}}\, dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- Insbesondere gilt:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} f(z)\, dz \Rightarrow \int_{\Gamma_k} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot c_{-1}.$$

Residuum

Definition: (Residuum) Die Funktion f besitze in a eine isolierte Singularität. Sei dann die Laurent-Reihe von f in der Umgebung von a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{für } 0 < |z-a| < r.$$

Der Koeffizient $c_{-1} \in \mathbb{C}$ heißt Residuum von f in a:

$$\mathrm{Res} f(a) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Res} f(z)|_{z=a}.$$

Bemerkungen:

- Der Begriff des Residuums bezieht sich auf die Laurent-Reihe von f um a, die in der Umgebung $B_r(a) \backslash \{a\}$ gilt, nicht auf beliebigen Kreisringen $B_{r_1}^{r_2}(a)$.
- Das Residuum von f in a ist eindeutig.
- Falls f analytisch in ganz $B_r(a)$, so gilt $\mathrm{Res} f(a) = 0$.

Satz: (Residuensatz)
Sei f im einfach zusammenhängenden Gebiet G analytisch bis auf endlich viele isolierte Singularitäten $z_1, \ldots, z_N$.
Sei weiter $\Gamma \subset G$ positiv orientierte geschlossene Kurve, die alle Singularitäten einmal umläuft.
Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res} f(z_k).$$

Bemerkungen:

- Die Integraldarstellung im Residuensatz kann auch geschrieben werden

  $$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in G_\Gamma} \mathrm{Res} f(z),$$

  denn es gilt $\mathrm{Res} f(z) = 0$ für alle $z \in G \backslash \{z_1, \ldots, z_N\}$.
- Insbesondere gilt (der Cauchysche Integralsatz):

  $$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in G_\Gamma} \mathrm{Res} f(z) = 0,$$

  falls f auf ganz G analytisch ist.

1

Residuum

Definition: (Residuum) Die Funktion f besitze in a eine isolierte Singularität. Sei dann die Laurent-Reihe von f in der Umgebung von a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{für } 0 < |z-a| < r.$$

Der Koeffizient $c_{-1} \in \mathbb{C}$ heißt Residuum von f in a:

$$\mathrm{Res} f(a) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Res} f(z)|_{z=a}.$$

Bemerkungen:

- Der Begriff des Residuums bezieht sich auf die Laurent-Reihe von f um a, die in der Umgebung $B_r(a) \backslash \{a\}$ gilt, nicht auf beliebigen Kreisringen $B_{r_1}^{r_2}(a)$.
- Das Residuum von f in a ist eindeutig.
- Falls f analytisch in ganz $B_r(a)$, so gilt $\mathrm{Res} f(a) = 0$.

- Das Residuum von f in a ist eindeutig.
- Falls f analytisch in ganz $B_r(a)$, so gilt $\mathrm{Res} f(a) = 0$.

Satz: (Residuensatz)
Sei f im einfach zusammenhängenden Gebiet G analytisch bis auf endlich viele isolierte Singularitäten $z_1, \ldots, z_N$.
Sei weiter $\Gamma \subset G$ positiv orientierte geschlossene Kurve, die alle Singularitäten einmal umläuft.
Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res} f(z_k).$$

Bemerkungen:

- Die Integraldarstellung im Residuensatz kann auch geschrieben werden

Bemerkungen:

- Die Integraldarstellung im Residuensatz kann auch geschrieben werden

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in G_\Gamma} \mathrm{Res} f(z),$$

denn es gilt $\mathrm{Res} f(z) = 0$ für alle $z \in G \backslash \{z_1, \ldots, z_N\}$.

- Insbesondere gilt (der Cauchysche Integralsatz):

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in G_\Gamma} \mathrm{Res} f(z) = 0,$$

falls f auf ganz G analytisch ist.

1

Residuum in Pol erster Ordnung

Satz: (Residuum in Pol erster Ordnung)
Die Funktion f besitze in $a \in \mathbb{C}$ einen Pol erster Ordnung. Dann gilt

$$\mathrm{Res} f(a) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z).$$

Folgerung: Seien $p(z)$ und $q(z)$ in einer Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ analytisch und sei

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

q besitze in a eine einfache Nullstelle (d.h. $q(a) = 0$ und $q'(a) \neq 0$).
Falls $p(a) \neq 0$, so ist a ein Pol erster Ordnung von f mit Residuum

$$\mathrm{Res} f(a) = \frac{p(a)}{q'(a)}.$$

Falls $p(a) = 0$, so ist a eine hebbare Singularität von f.

Beweis: Es gilt

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = \lim_{z \to a} (z - a) \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \to a} \frac{p(z)}{\frac{q(z) - q(a)}{z - a}} = \frac{p(a)}{q'(a)}.$$

2

Pol erster Ordnung

Satz: (Residuum in Pol erster Ordnung)
Die Funktion f besitze in $a \in \mathbb{C}$ einen Pol erster Ordnung. Dann gilt

$$\mathrm{Res} f(a) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z).$$

Folgerung: Seien $p(z)$ und $q(z)$ in einer Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ analytisch und sei

$$f(z) = \frac{p(z)}{\;}$$

Folgerung: Seien $p(z)$ und $q(z)$ in einer Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ analytisch und sei

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

q besitze in a eine einfache Nullstelle (d.h. $q(a) = 0$ und $q'(a) \neq 0$).
Falls $p(a) \neq 0$, so ist a ein Pol erster Ordnung von f mit Residuum

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{p(a)}{q'(a)}.$$

Falls $p(a) = 0$, so ist a eine hebbare Singularität von f.

Beweis: Es gilt

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z\to a}\frac{p(z)}{\frac{q(z)-q(a)}{z-a}} = \frac{p(a)}{q'(a)}.$$

2

Beispiele
Anwendungen Residuensatz

Betrachte: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+4}\,dx := I/2$

- Der Integrand ist gerade, und somit gilt

$$I = \lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+4}\,dx.$$

- Es gilt (mit entsprechenden Bezeichnungen aus dem vorigen Beispiel)

$$I_R = \int_\Gamma \frac{1}{z^4+4}\,dz - J_R,$$

  wobei erneut $\lim_{R\to\infty} J_R = 0$.

- Wir bestimmen das Integral I_R nun mit dem Residuensatz.

- Der Integrand

$$f(z) = \frac{1}{z^4+4}$$

  besitzt Pole erster Ordnung in den vier Punkten $\pm 1 \pm i$.

- Für $R > \sqrt{2}$ werden die beiden Pole $z = \pm 1 + i$ von Γ umlaufen.
- Es gilt

$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4+4}\Big|_{z=1+i} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=1+i} = \frac{1}{4(1+i)^3} = \frac{1+i}{4(1+i)^4} = -\frac{1+i}{16}$$

$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4+4}\Big|_{z=-1+i} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=-1+i} = \frac{1}{4(-1+i)^3} = \frac{-1+i}{4(-1+i)^4} = -\frac{-1+i}{16}$$

- Daraus folgt mit dem Residuensatz

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^4+4}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1+i}{16} - \frac{-1+i}{16}\right) = \frac{\pi}{4} = I.$$

Betrachte für $a > 0$ und $\omega > 0$ das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2}\,dx.$$

- Es gilt (mit entsprechenden Bezeichnungen aus dem vorigen Beispiel)

$$I_R = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2}\,dx \qquad \text{und} \qquad J_R = \int_{\Gamma''} \frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2}\,dz$$

  wobei erneut $\lim_{R\to\infty} J_R = 0$, und somit

$$I = \int_\Gamma \frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2}\,dz.$$

- Mit dem Residuensatz gilt

$$\int_\Gamma \frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2}\Big|_{z=ia} = 2\pi i \frac{e^{-\omega a}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a},$$

Betrachte: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+4}\,dx := I/2$

- Der Integrand ist gerade, und somit gilt

$$I = \lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+4}\,dx.$$

- Es gilt (mit entsprechenden Bezeichnungen aus dem vorigen Beispiel)

$$I_R = \int_\Gamma \frac{1}{z^4+4}\,dz - J_R,$$

  wobei erneut $\lim_{R\to\infty} J_R = 0$.

- Wir bestimmen das Integral I_R nun mit dem Residuensatz.

- Der Integrand
$$f(z) = \frac{1}{z^4+4}$$
besitzt Pole erster Ordnung in den vier Punkten $\pm 1 \pm i$.
- Für $R > \sqrt{2}$ werden die beiden Pole $z = \pm 1 + i$ von Γ umlaufen.
- Es gilt
$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4+4}\bigg|_{z=1+i} = \frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=1+i} = \frac{1}{4(1+i)^3} = \frac{1+i}{4(1+i)^4} = -\frac{1+i}{16}$$
$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4+4}\bigg|_{z=-1+i} = \frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=-1+i} = \frac{1}{4(-1+i)^3} = \frac{-1+i}{4(-1+i)^4} = -\frac{-1+i}{16}$$
- Daraus folgt mit dem Residuensatz
$$\int_\Gamma \frac{1}{z^4+4}\, dz = 2\pi i \left(-\frac{1+i}{16} - \frac{-1+i}{16}\right) = \frac{\pi}{4} = I.$$

Betrachte für $a > 0$ und $\omega > 0$ das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2}\,dx.$$

- Es gilt (mit entsprechenden Bezeichnungen aus dem vorigen Beispiel)

$$I_R = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2}\,dx \qquad \text{und} \qquad J_R = \int_{\Gamma''} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}\,dz$$

wobei erneut $\lim_{R\to\infty} J_R = 0$, und somit

$$I = \int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}\,dz.$$

- Mit dem Residuensatz gilt

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}\bigg|_{z=ia} = 2\pi i \frac{e^{-\omega a}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a}.$$

Erinnerung

Vorbemerkungen

Komplexe Funktionen

Beispiele
Anwendungen Residuensatz

Residuum in
Pol erster Ordnung

Residuum