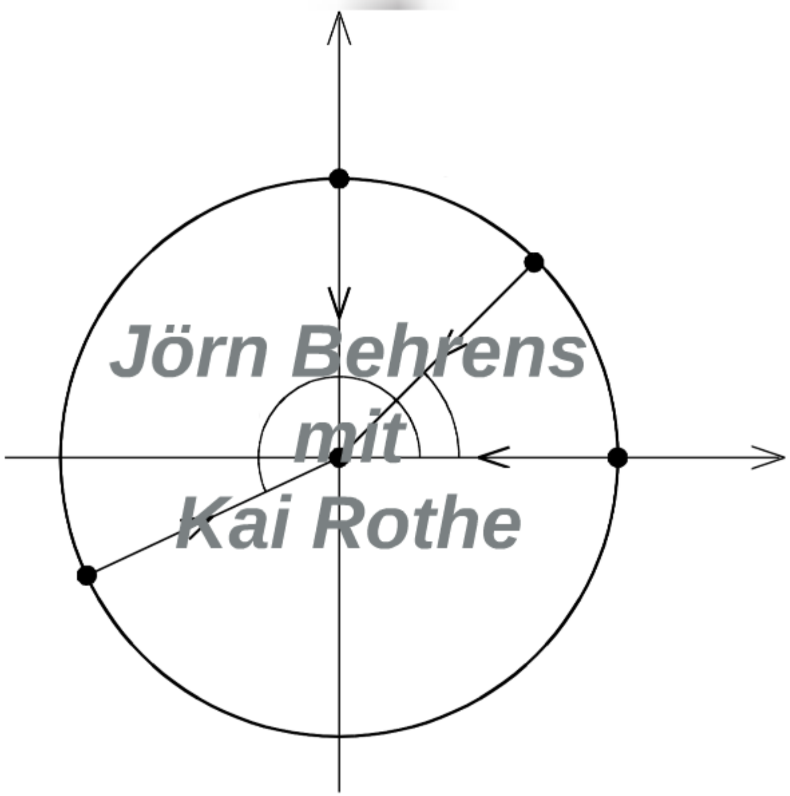
Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Jörn Behrens

mit

Kai Rothe

Fourier-Transformation

Erinnerung

Vorbemerkungen: (Ausgangspunkt)

- Die Fourier-Reihenentwicklung einer T-periodischen stückweise stetig differenzierbaren Funktion $f_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}.$$

- Dabei ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$ eine (Grund-) Frequenz.
- Die Fourier-Koeffizienten γ_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sind gegeben:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f_T(\tau) e^{-ik\omega\tau} \, d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-ik\omega\tau} \, d\tau \end{aligned}$$

Vorbemerkungen: (Begriffe)

- f_T kann als zeitkontinuierliches T-periodisches Signal interpretiert werden.
- Dann ist der Fourier-Koeffizient γ_k ein Verstärkungsfaktor
- Der Term $e^{-ik\omega\tau}$ ist die Grundschwingung zur
- Frequenz $\omega_k = k\omega = k\frac{2\pi}{T}$.
- Also können γ_k als Amplituden der beteiligten Schwingungen gesehen werden.
- Wir nennen die diskrete Menge (Folge) der Fourier-Koeffizienten $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ das Spektrum von f_T.
- Ist das Spektrum endlich, so sind die Frequenzen der beteiligten Schwingungen beschränkt (und umgekehrt).

Vorbemerkungen: (Alternative Darstellung)
Schreibt man ω als

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_{k+1} - \omega_k = \Delta\omega,$$

So ergibt sich die alternative Darstellung

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{i\omega_k(t-\tau)} \, d\tau \cdot \Delta\omega.$$

Vorbemerkungen: (Ausgangspunkt)

- Die Fourier-Reihenentwicklung einer T-periodischen stückweise stetig differenzierbaren Funktion $f_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}.$$

- Dabei ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$ eine (Grund-) Frequenz.
- Die Fourier-Koeffizienten γ_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sind gegeben:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f_T(\tau) e^{-ik\omega\tau} \, d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-ik\omega\tau} \, d\tau \end{aligned}$$

Vorbemerkungen: (Begriffe)

- f_T kann als zeitkontinuierliches T-periodisches Signal interpretiert werden.
- Dann ist der Fourier-Koeffizient γ_k ein Verstärkungsfaktor
- Der Term $e^{-ik\omega\tau}$ ist die Grundschwingung zur
- Frequenz $\omega_k = k\omega = k\frac{2\pi}{T}$.
- Also können γ_k als Amplituden der beteiligten Schwingungen gesehen werden.
- Wir nennen die diskrete Menge (Folge) der Fourier-Koeffizienten $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ das Spektrum von f_T.
- Ist das Spektrum endlich, so sind die Frequenzen der beteiligten Schwingungen beschränkt (und umgekehrt).

Vorbemerkungen: (Alternative Darstellung)

- Ist das Spektrum endlich, so sind die Frequenzen der beteiligten Schwingung beschränkt (und umgekehrt).

Vorbemerkungen: (Alternative Darstellung)
Schreibt man ω als

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_{k+1} - \omega_k = \Delta\omega,$$

So ergibt sich die alternative Darstellung

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{i\omega_k (t-\tau)} \, d\tau \cdot \Delta\omega.$$

Fragen

Besitzt ein nicht-periodisches Signal $f(t)$ eine entsprechende Fourier-Darstellung?

Anschlussfragen:

- Wie sieht die Fourier-Darstellung aus? Wieder eine Reihe?
- Falls ja, unter welchen Voraussetzungen existiert diese Darstellung?
- Wie sieht dann das Spektrum aus?

1

Besitzt ein nicht-periodisches Signal $f(t)$ eine entsprechende Fourier-Darstellung?

Anschlussfragen:

- Wie sieht die Fourier-Darstellung aus? Wieder eine Reihe?
- Falls ja, unter welchen Voraussetzungen existiert diese Darstellung?
- Wie sieht dann das Spektrum aus?

1

Fourier-Transformierte

Definition: (Fourier-Transformierte)
Falls das Integral

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\ d\tau$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert, so ist die Funktion g die Fourier-Transformierte von f.

Vermutung: (Fourier-Umkehrformel)
Mit $T \to \infty$ gilt die Fourier-Umkehrformel:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}\ d\omega$$

bzw.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\ d\tau d\omega$$

Satz: (Existenz der Fourier-Umkehrformel)
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf jedem endlichen reellen Intervall stückweise stetig. Weiterhin besitze f in jedem Punkt eine linksseitige und rechtsseitige Ableitung und es existiere das Integral

$$\|f(t)\|_{L_1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\ dt.$$

Dann gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\ d\tau d\omega.$$

Satz: [illegible]

[illegible]

Definition: (Fourier-Transformierte)
Falls das Integral

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert, so ist die Funktion g die Fourier-Transformierte von f.

urier-Umkerhformel)

Satz: (Existenz der Fourier-Umkehrformel)
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf jedem endlichen reellen

Vermutung: (Fourier-Umkerhformel)
Mit $T \to \infty$ gilt die Fourier-Umkehrformel:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

bzw.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\omega)} \, d\tau d\omega$$

Satz: (Existenz der Fourier-Umkehrformel)
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf jedem endlichen reellen Intervall stückweise stetig. Weiterhin besitze f in jedem Punkt eine linksseitige und rechtsseitige Ableitung und es existiere das Integral

$$\|f(t)\|_{L_1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt.$$

Dann gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\omega)} \, d\tau d\omega.$$

Satz: (Fortsetzung Existenz der Fourier-Umkehrformel)
Falls f bei $t_0 \in \mathbb{R}$ unstetig ist, so liefert das Doppelintegral der Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\omega)} \, d\tau d\omega$$

für $t = t_0$ den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwertes von f für $t \to t_0$:

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{t \nearrow t_0} f(t) + \lim_{t \searrow t_0} f(t) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t_0-\omega)} \, d\tau d\omega.$$

Diskrete/Kontinuierliche Fourier-Transformation

Diskrete Fourier-Transformation: Es gilt die Fourier-Reihendarstellung

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

mit diskreten Fourier-Koeffizienten

$$\gamma_k \equiv \gamma_k(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-ik\omega\tau}\, d\tau \qquad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Kontinuierliche Fourier-Transformation: Es gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega.$$

mit der kontinuierlichen Fourier-Transformation

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

2

ourier-Transformatio

Diskrete Fourier-Transformation: Es gilt die Fourier-Reihendarstellung

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

mit diskreten Fourier-Koeffizienten

$$\gamma_k \equiv \gamma_k(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-ik\omega\tau} \, d\tau \qquad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Kontinuierliche Fourier-Transformation: Es gilt die Fourier-Umkehrformel

$$\gamma_k = \gamma_k(T) = \frac{1}{T}\int_{-T/2} f_T(t)e \quad dt \quad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Kontinuierliche Fourier-Transformation: Es gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega.$$

mit der kontinuierlichen Fourier-Transformation

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

Beispiele

Beispiel 2

Berechne die entsprechende Fourier-Umkehrung von

$$\hat{f}(\omega) = 2a\,\mathrm{sinc}(\omega a)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(\omega a)}{\omega} e^{i\omega t}\, d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a)\cos(\omega t)}{\omega}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega(a+t)) + \sin(\omega(a-t))}{\omega}\, d\omega
\end{aligned}$$

Verwende den Residuensatz, um Integrale der Form

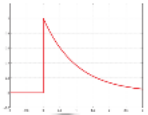
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t}\, dt$$

zu berechnen. Zeige dann die Fourier-Umkehrformel $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) = f(t)$.

Beispiel 3

Berechne für $a > 0$ die Fourier-Transformation $\hat{f}$ von

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{für } t \geq 0; \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

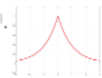


$$\begin{aligned}
F[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\, dt \\
&= -\frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{a+i\omega}.
\end{aligned}$$

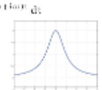
Beispiel 4

Berechne für $a > 0$ die Fourier-Transformation $\hat{f}$ von

$$f(t) = e^{-a|t|}.$$



$$\begin{aligned}
F[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\, dt \\
&= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$



Beispiel 2

Berechne die entsprechende Fourier-Umkehrung von

$$\hat{f}(\omega) = 2a\mathrm{sinc}(\omega a)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(\omega a)}{\omega} e^{i\omega t}\, d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a)\cos(\omega t)}{\omega}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega(a+t)) + \sin(\omega(a-t))}{\omega}\, d\omega
\end{aligned}$$

Verwende den Residuensatz, um Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t}\, dt$$

zu berechnen. Zeige dann die Fourier-Umkehrformel $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) = f(t)$.

Beispiel 3

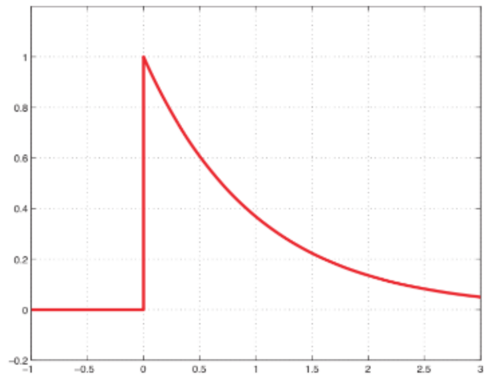
$$\int_{-\infty} \frac{}{t} \, dt$$

zu berechnen. Zeige dann die Fourier-Umkehrformel $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) = f(t)$.

Beispiel 3

Berechne für $a > 0$ die Fourier-Transformation $\hat{f}$ von

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{für } t \geq 0; \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$



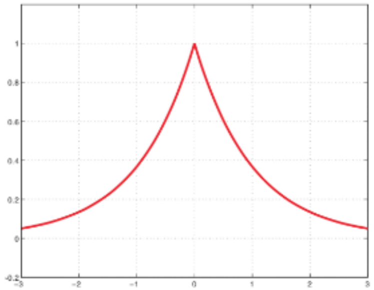
$$\begin{aligned} F[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} \, dt \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{a+i\omega}. \end{aligned}$$

Beispiel 4

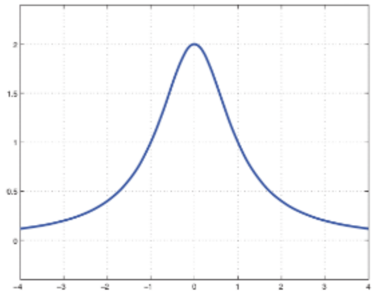
Beispiel 4

Berechne für $a > 0$ die Fourier-Transformation $\hat{f}$ von

$$f(t) = e^{-a|t|}.$$



$$\begin{aligned} F[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{(a+i\omega)t}\,dt \\ &= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}. \end{aligned}$$



Trigonometrische Darstellung

Zerlegt man die Fourier-Transformation der *reellen* Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in Realteil und (verschwindenden!) Imaginärteil, so folgt mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin[\omega(t-\tau)] \, d\tau \, d\omega = 0$$

die trigonometrische Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos[\omega(t-\tau)] \, d\tau \, d\omega$$

Falls f eine gerade Funktion ist, so gilt die Darstellung

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega t) \cos(\omega \tau) \, d\tau \, d\omega.$$

Falls f eine ungerade Funktion ist, so gilt die Darstellung

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega t) \sin(\omega \tau) \, d\tau \, d\omega.$$

Darstellung

Zerlegt man die Fourier-Transformation der *reellen* Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in Realteil und (verschwindenden!) Imaginärteil, so folgt mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] \, d\tau \, d\omega = 0$$

die trigonometrische Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos[\omega(t - \tau)] \, d\tau \, d\omega$$

Falls f eine gerade Funktion ist, so gilt die Darstellung

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau) \cos(\omega t) \cos(\omega \tau) \, d\tau \, d\omega.$$

Falls f eine ungerade Funktion ist, so gilt die Darstellung

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau) \sin(\omega t) \sin(\omega \tau) \, d\tau \, d\omega.$$

Rechenregeln

Ausgangspunkt: Die (kontinuierliche) Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

- $\mathcal{F}$ ist ein linearer `Integraloperator` bzw. `Integraltransformation`, d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f+g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega) \\ \mathcal{F}[\alpha f](\omega) &= \alpha\mathcal{F}[f](\omega) \qquad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Für die `Konjugation` $\bar{f}$ von f gilt

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(-t)](\omega)}.$$

- Für die `Streckung` $f(c\cdot)$, $c > 0$, von f gilt

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c}\mathcal{F}[f](\omega/c).$$

- **Verschiebungssätze:** Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t-a)](\omega) &= e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f](\omega) \\ \mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega - a) \end{aligned}$$

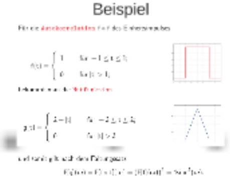
- **Faltungssätze:** Für $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ist die `Faltung` $f * g$ zwischen f und g definiert durch

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau.$$

  Es gelten die `Faltungssätze`

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f*g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega)\cdot\mathcal{F}[g](\omega) \\ \mathcal{F}[f\cdot g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(\omega) \end{aligned}$$

Beispiel



Rechenregeln

Ausgangspunkt: Die (kontinuierliche) Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau.$$

- $\mathcal{F}$ ist ein linearer Integraloperator bzw. Integraltransformation, d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f+g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega) \\ \mathcal{F}[\alpha f](\omega) &= \alpha \mathcal{F}[f](\omega) \qquad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Für die Konjugation $\overline{f}$ von f gilt

$$\mathcal{F}[\overline{f}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(-t)](\omega)}.$$

- Für die Streckung $f(c\cdot)$, $c > 0$, von f gilt

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c} \mathcal{F}[f](\omega/c).$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f+g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega) \\ \mathcal{F}[\alpha f](\omega) &= \alpha \mathcal{F}[f](\omega) \qquad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Für die Konjugation $\bar{f}$ von f gilt

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(-t)](\omega)}.$$

- Für die Streckung $f(c\cdot)$, $c > 0$, von f gilt

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c}\mathcal{F}[f](\omega/c).$$

- **Verschiebungssätze:** Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t-a)](\omega) &= e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f](\omega) \\ \mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega - a) \end{aligned}$$

- **Faltungssätze:** Für $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ist die Faltung $f * g$ zwischen f und g definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau.$$

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c}\mathcal{F}[f](\omega/c).$$

- **Verschiebungssätze:** Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) &= e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f](\omega)\\ \mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega - a)\end{aligned}$$

- **Faltungssätze:** Für $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ist die Faltung $f * g$ zwischen f und g definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

Es gelten die Faltungssätze

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)\\ \mathcal{F}[f \cdot g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(\omega)\end{aligned}$$

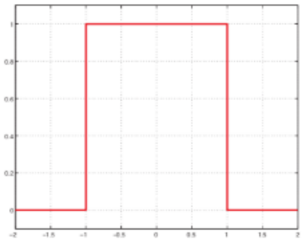
Beispiel

Für die Autokorrelation $f * f$ des Einheitsimpulses

Beispiel

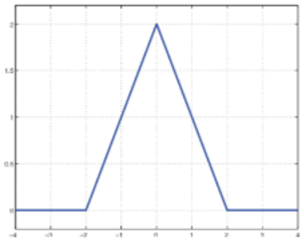
Für die Autokorrelation $f * f$ des Einheitsimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq t \leq 1; \\ 0 & \text{für } |t| > 1; \end{cases}$$



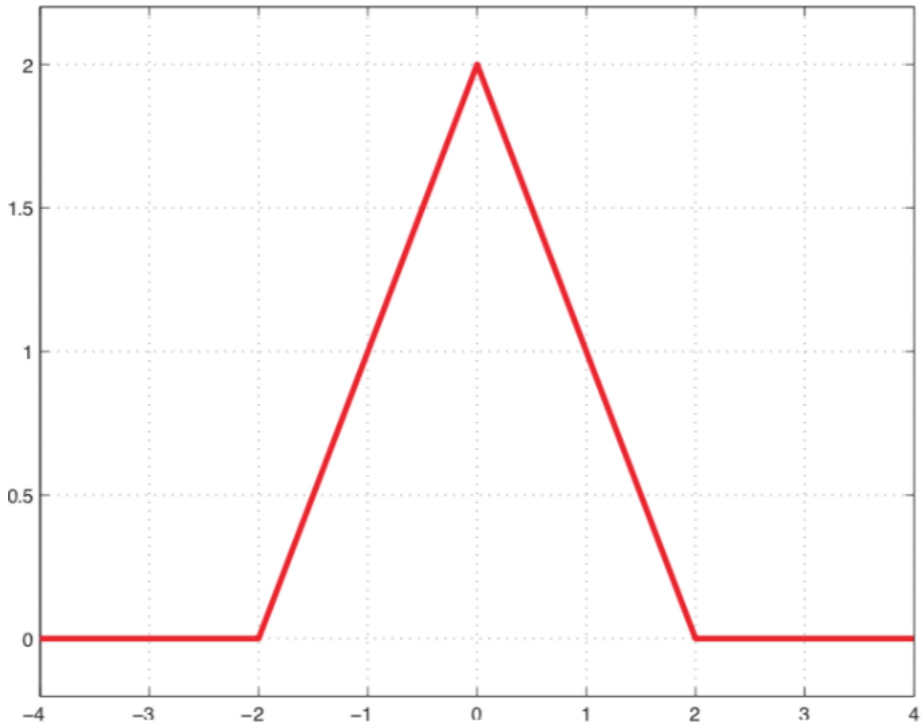
bekommt man die Hutfunktion

$$g(t) = \begin{cases} 2 - |t| & \text{für } -2 \leq t \leq 2; \\ 0 & \text{für } |t| > 2; \end{cases}$$



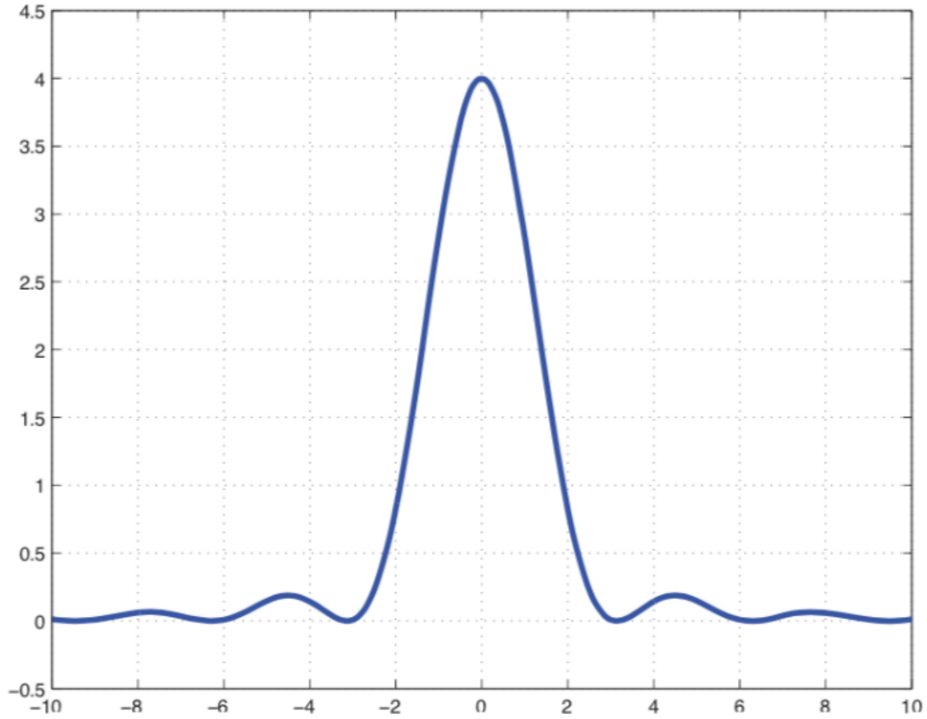
und somit gilt nach dem Faltungssatz

$$F[g](\omega) = F[f * f](\omega) = (F[f](\omega))^2 = 4\text{sinc}^2(\omega).$$



Hutfunktion

$f(t)$.



Fourier-Transformation

$\widehat{f}(\omega) = 4\text{sinc}^2(\omega)$.

Differentiation der Fourier-Transformation

Satz: (Differentiation der Fourier-Transformation)
Ist f eine stückweise C^1-Funktion mit (höchstens) endlich vielen Unstetigkeitsstellen $t_1, \ldots, t_m$ und sind f und f' absolut integrierbar, d.h.

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\ dt < \infty \quad \text{und} \quad \|f'\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\ dt < \infty$$

so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega) - \sum_{k=1}^{m} \left(f(t_k^+) - f(t_k^-)\right) e^{-i\omega t_k}.$$

3

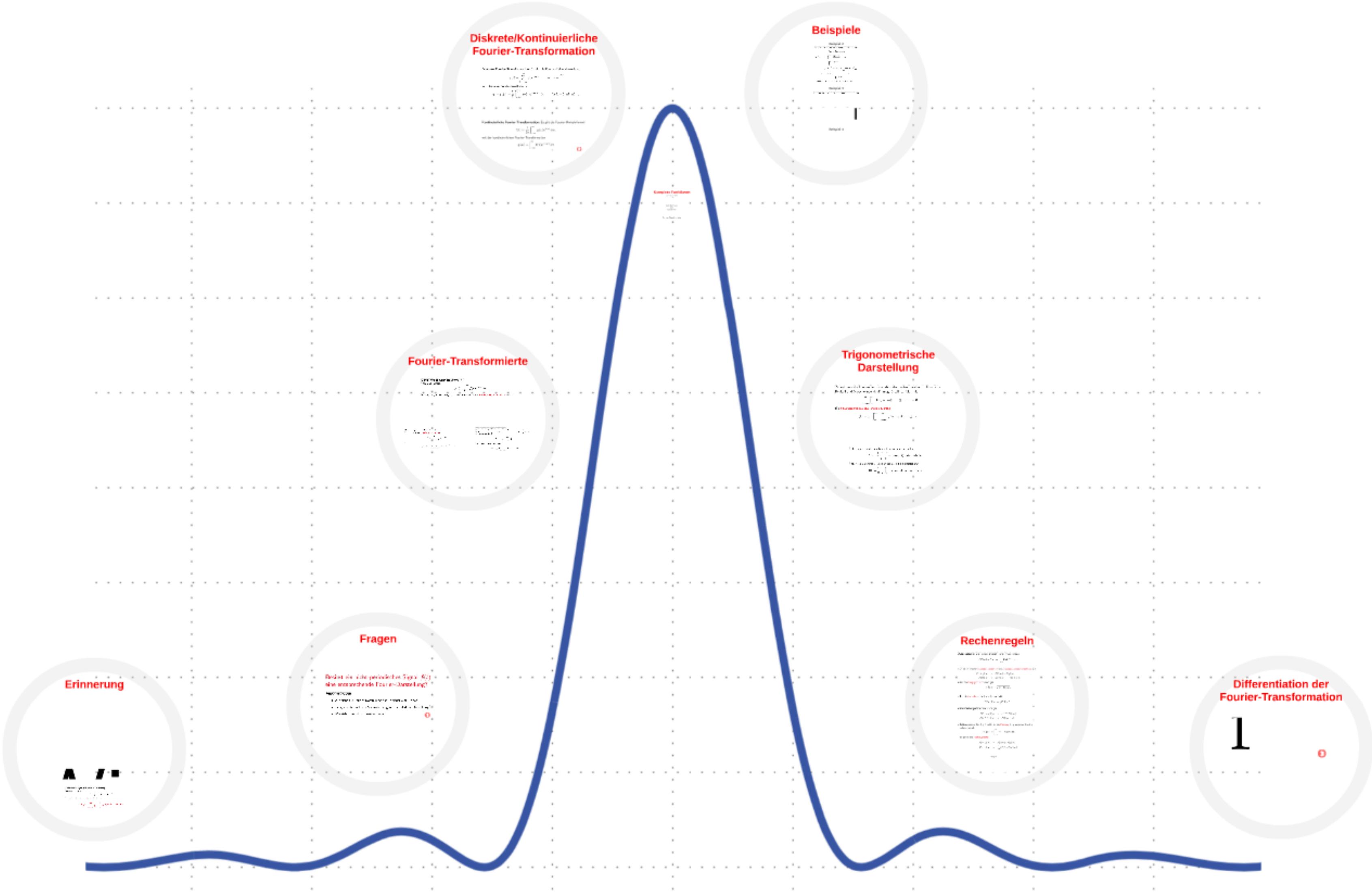
Satz: (Differentiation der Fourier-Transformation)
Ist f eine stückweise C^1-Funktion mit (höchstens) endlich vielen Unstetigkeitsstellen $t_1, \ldots, t_m$ und sind f und f' absolut integrierbar, d.h.

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\ dt < \infty \quad \text{und} \quad \|f'\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)\ dt < \infty$$

so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega) - \sum_{k=1}^{m} \left(f(t_k^+) - f(t_k^-)\right) e^{-i\omega t_k}.$$

3



Diskrete/Kontinuierliche Fourier-Transformation
Beispiele
Fourier-Transformierte
Trigonometrische Darstellung
Fragen
Rechenregeln
Erinnerung
Differentiation der Fourier-Transformation