Komplexe Funktionen

02. 07. 2018

J. Behrens

(1) Fourier-Darstellung für nicht-periodisches Signal:

- Grundidee: Fasse nicht-periodisches Signal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Signal mit unendlicher Periode auf.
- Betrachte also Grenzübergang:

$$f(t) = \lim_{T \to \infty} f_T(t)$$

mit $f_T(t)$ geeignete T-periodische Funktion

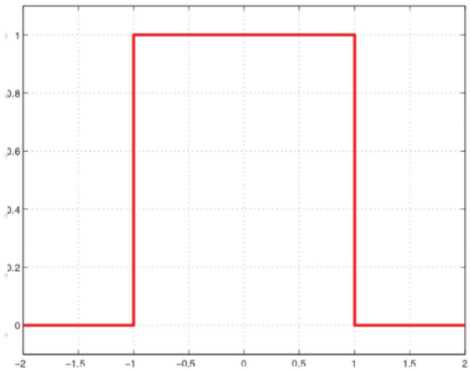
- Setze $$g_T(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$
- Dann folgt $$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_T(\omega)\, e^{i\omega_k t}\, (\omega_{k+1} - \omega_k)$$

[Erinnerung: $f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau)\, e^{i\omega_k (t-\tau)}\, d\tau\, \Delta\omega$]

- Beachte: Dies ist eine Riemannsche Summe mit Zerlegung $\{\omega_k\}_k$, die für T groß beliebig fein werden kann
- Setze: $$g(\omega) := \lim_{T \to \infty} g_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

② Beispiel 1 :

- Betrachte : $\quad f(t) = \begin{cases} 1 & -a \le t \le a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$



Der Einheitsimpuls $f(t)$.

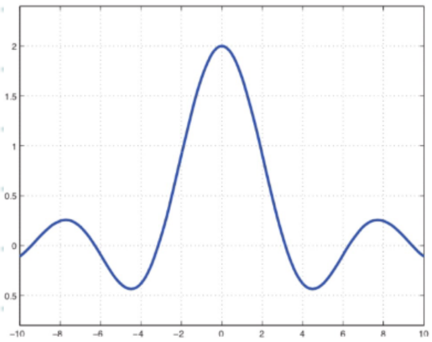
- Berechne die Fourier-Transformation $\hat{f}$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{i\omega}\, e^{-i\omega t}\Big|_{t=-a}^{t=a} = \frac{1}{i\omega}\left[e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right]$$

$$= \left.\begin{cases} \frac{2}{\omega}\sin(\omega a) & (\omega a \neq 0) \\ 2a & (\omega a = 0) \end{cases}\right\} = 2a \cdot \mathrm{sinc}(\omega a)$$

mit $\mathrm{sinc}(z) := \begin{cases} \frac{1}{z}\sin(z) & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$



Die sinc-Funktion $\hat{f}(\omega)$.

③ Beweis:

- o.E. reicht es $m=1$ anzunehmen, d.h. t_1 ist Unstetigkeitsstelle.
- Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{t_1} f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt + \int_{t_1}^{\infty} f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \Big[f(t)\, e^{-i\omega t}\Big]_{-\infty}^{t_1} + \Big[f(t)\, e^{-i\omega t}\Big]_{t_1}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \Big[f(t_1^-) - f(t_1^+)\Big] e^{-i\omega t} + i\omega\, \mathcal{F}[f](\omega) \quad (*)$$

- Dabei haben wir verwendet: $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$ da $f \in C_1(\mathbb{R})$.

|