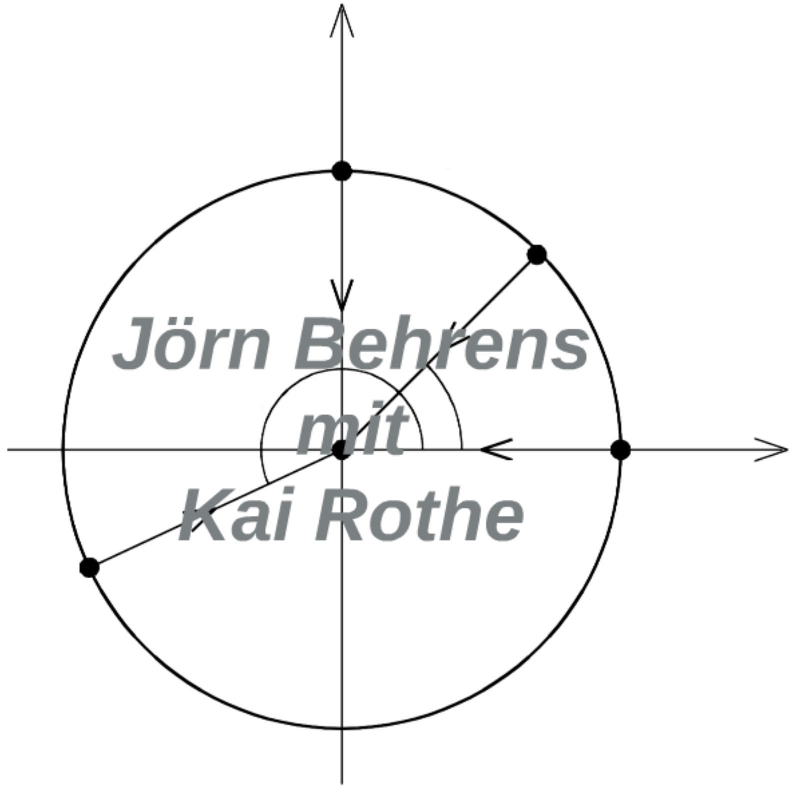
Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Laplace-Transformation

Erinnerung

Definition: (Fourier-Transformierte)
Falls das Integral

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert, so ist die Funktion g die Fourier-Transformierte von f.

Satz: (Existenz der Fourier-Umkehrformel)
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf jedem endlichen reellen Intervall stückweise stetig. Weiterhin besitze f in jedem Punkt eine linksseitige und rechtsseitige Ableitung und es existiere das Integral

$$\|f(t)\|_{L_1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\; dt.$$

Dann gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)}\, d\tau d\omega.$$

Ausgangspunkt: Die (kontinuierliche) Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

- $\mathcal{F}$ ist ein linearer Integraloperator bzw. Integraltransformation, d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f+g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega) \\ \mathcal{F}[\alpha f](\omega) &= \alpha\mathcal{F}[f](\omega) \qquad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Für die Konjugation $\bar{f}$ von f gilt

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(-t)](\omega)}.$$

- Für die Streckung $f(c\cdot)$, $c > 0$, von f gilt

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c}\mathcal{F}[f](\omega/c).$$

- **Verschiebungssätze:** Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t-a)](\omega) &= e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f](\omega) \\ \mathcal{F}[e^{iat} f(t)](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega - a) \end{aligned}$$

- **Faltungssätze:** Für $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ist die Faltung $f * g$ zwischen f und g definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau.$$

Es gelten die Faltungssätze

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega) \\ \mathcal{F}[f \cdot g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(\omega) \end{aligned}$$

Satz: (Differentiation der Fourier-Transformation)
Ist f eine stückweise C^1-Funktion mit (höchstens) endlich vielen Unstetigkeitsstellen $t_1, \ldots, t_n$ und sind f und f' absolut integrierbar, d.h.

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty \quad \text{und} \quad \|f'\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt < \infty$$

so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega) - \sum_{k=1}^{n} \left(f(t_k^+) - f(t_k^-)\right) e^{-i\omega t_k}.$$

Einleitung

Definition: (Fourier-Transformierte)
Falls das Integral

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert, so ist die Funktion g die Fourier-Transformierte von f.

Satz: (Existenz der Fourier-Umkehrformel)
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf jedem endlichen reellen Intervall stückweise stetig. Weiterhin besitze f in jedem Punkt eine linksseitige und rechtsseitige Ableitung und es existiere das Integral

$$\|f(t)\|_{L_1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt.$$

Dann gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\omega)} \, d\tau d\omega.$$

Ausgangspunkt: Die (kontinuierliche) Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

- $\mathcal{F}$ ist ein linearer Integraloperator bzw. Integraltransformation, d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f+g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega) \\ \mathcal{F}[\alpha f](\omega) &= \alpha\mathcal{F}[f](\omega) \qquad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Für die Konjugation $\overline{f}$ von f gilt

$$\mathcal{F}[\overline{f}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(-t)](\omega)}.$$

- Für die Streckung $f(c\cdot)$, $c > 0$, von f gilt

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c}\mathcal{F}[f](\omega/c).$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f+g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega)+\mathcal{F}[g](\omega)\\ \mathcal{F}[\alpha f](\omega) &= \alpha\mathcal{F}[f](\omega) \qquad \text{für } \alpha\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

- Für die Konjugation $\bar{f}$ von f gilt

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(-t)](\omega)}.$$

- Für die Streckung $f(c\cdot)$, $c>0$, von f gilt

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c}\mathcal{F}[f](\omega/c).$$

- **Verschiebungssätze:** Für $a\in\mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) &= e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f](\omega)\\ \mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega-a)\end{aligned}$$

- **Faltungssätze:** Für $f,g\in L_1(\mathbb{R})$ ist die Faltung $f*g$ zwischen f und g definiert durch

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c}\mathcal{F}[f](\omega/c).$$

- **Verschiebungssätze:** Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) &= e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f](\omega)\\ \mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega - a)\end{aligned}$$

- **Faltungssätze:** Für $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ist die `Faltung` $f * g$ zwischen f und g definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

Es gelten die `Faltungssätze`

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)\\ \mathcal{F}[f \cdot g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(\omega)\end{aligned}$$

Satz: (Differentiation der Fourier-Transformation)
Ist f eine stückweise C^1-Funktion mit (höchstens) endlich vielen Unstetigkeitsstellen $t_1, \ldots, t_m$ und sind f und f' absolut integrierbar, d.h.

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\ dt < \infty \quad \text{und} \quad \|f'\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)\ dt < \infty$$

so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega) - \sum_{k=1}^{m} \left(f(t_k^+) - f(t_k^-)\right) e^{-i\omega t_k}.$$

Anwendung: Lösung von gew. DGL

Ziel: Bestimme die Lösung der (gewöhnlichen) Differentialgleichung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t).$$

Annahmen: (Wachstumsbedingungen)

$$\lim_{|t|\to\infty} y(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{|t|\to\infty} y'(t) = 0$$

Fourier-Transformation: Mit der Regel für die Ableitung gilt

$$(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega),$$

wobei

$$Y = \mathcal{F}[y] \quad \text{und} \quad C = \mathcal{F}[c].$$

Erhalte:

$$Y(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega a + b} C(\omega).$$

Rücktransformation: Mit Faltungssatz erhalte

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega(t-\tau)} \, d\tau d\omega.$$ 1

sung von gew. D

Ziel: Bestimme die Lösung der (gewöhnlichen) Differentialgleichung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t).$$

Annahmen: (Wachstumsbedingungen)

$$\lim_{|t|\to\infty} y(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{|t|\to\infty} y'(t) = 0$$

Fourier-Transformation: Mit der Regel für die Ableitung gilt

$$(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega),$$

wobei

$$Y = \mathcal{F}[y] \quad \text{und} \quad C = \mathcal{F}[c].$$

Erhalte:

$$Y(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega a + b} C(\omega).$$

$$\lim_{|t|\to\infty} y(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{|t|\to\infty} y'(t) = 0$$

Fourier-Transformation: Mit der Regel für die Ableitung gilt

$$(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega),$$

wobei

$$Y = \mathcal{F}[y] \quad \text{und} \quad C = \mathcal{F}[c].$$

Erhalte:

$$Y(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega a + b} C(\omega).$$

Rücktransformation: Mit Faltungssatz erhalte

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega(t-\tau)} \, d\tau d\omega.$$

Anwendung: Potentialgleichung

Ausgangspunkt: Betrachte das Potentialproblem auf der Halbebene.

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Fourier-Transformation bez. der Ortsvariablen x ergibt

$$U_{yy}(\omega, y) = -(i\omega)^2 U(\omega, y) = \omega^2 U(\omega, y)$$

und somit

$$U(\omega, y) = C_1 e^{|\omega| y} + C_2 e^{-|\omega| y}$$

Da die Lösung für $|y| \to \infty$ verschwindet, gilt $C_1 = 0$ und somit

$$U(\omega, y) = U_0(y) e^{-|\omega| y}.$$

Es gilt $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\omega| y}\right] = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{y^2 + x^2}$ und weiterhin mit dem Faltungssatz

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} u_0(\xi)\, d\xi.$$

Potentialgleichung

Ausgangspunkt: Betrachte das Potentialproblem auf der Halbebene.

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Fourier-Transformation bez. der Ortsvariablen x ergibt

$$U_{yy}(\omega, y) = -(i\omega)^2 U(\omega, y) = \omega^2 U(\omega, y)$$

und somit

$$U(\omega, y) = C_1 e^{|\omega| y} + C_2 e^{-|\omega| y}$$

Da die Lösung für $|y| \to \infty$ verschwindet, gilt $C_1 = 0$ und somit

$$U(\omega, y) = U_0(y) e^{-|\omega| y}.$$

Es gilt $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\omega| y}\right] = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{y^2 + x^2}$ und weiterhin mit dem Faltungssatz

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Fourier-Transformation bez. der Ortsvariablen x ergibt

$$U_{yy}(\omega, y) = -(i\omega)^2 U(\omega, y) = \omega^2 U(\omega, y)$$

und somit

$$U(\omega, y) = C_1 e^{|\omega| y} + C_2 e^{-|\omega| y}$$

Da die Lösung für $|y| \to \infty$ verschwindet, gilt $C_1 = 0$ und somit

$$U(\omega, y) = U_0(y) e^{-|\omega| y}.$$

Es gilt $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\omega| y}\right] = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{y^2 + x^2}$ und weiterhin mit dem Faltungssatz

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} u_0(\xi)\, d\xi.$$

Theorem von Shannon

Theorem: (Abtasttheorem von Shannon)
Voraussetzungen:

- Sei $f(t)$ ein für $t \geq 0$ definiertes Signal (bei $t = 0$ einsetzend).
- f werde durch $f(-t) = f(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ zu einer geraden Funktion fortgesetzt.
- f erfülle die Voraussetzungen für den Satz über die Fourier-Umkehrformel:
  - Stückweise Stetigkeit auf endlich vielen Intervallen,
  - Rechtsseitige und linksseitige Ableitung existiert,
  - $\|f(t)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty$.
- Das Spektrum von f sei beschränkt, d.h. für ein $\omega_0 > 0$ gilt: $\mathcal{F}[f](\omega) = 0$ für $|\omega| > \omega_0$.

Dann gilt: Tastet man f zu den Zeitpunkten

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ab, so kann f aus diesen Informationen für alle t exakt rekonstruiert werden.

Beweis: Unter den Voraussetzungen für die Fourier-Umkehrformel gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

Setze $\hat{f}(\omega)$ zu einer $2\omega_0$-periodischen Funktion fort, mit

$$\hat{f}(\omega \pm 2\omega_0) = \hat{f}(\omega).$$

Dann besitzt die Fourier-Reihe

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{\omega_0}\omega}$$

die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{-ik\frac{\pi}{\omega_0}\omega}\, d\omega$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man mit der Fourier-Umkehrformel schreiben als

$$c_k = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f(t_k)$$

Setzt man die Darstellung von $\hat{f}$ in die Umkehrformel ein, so bekommt man

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\, d\omega, \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{i(t+k\pi/\omega_0)}\left[e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\right]_{\omega=-\omega_0}^{\omega=\omega_0} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\omega_0 c_k \frac{1}{\omega_0 t + k\pi}\sin(\omega_0 t + k\pi). \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)\frac{\sin(\omega_0 t + k\pi)}{\omega_0 t + k\pi} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Theorem: (Abtasttheorem von Shannon)

Voraussetzungen:

- Sei $f(t)$ ein für $t \geq 0$ definiertes Signal (bei $t = 0$ einsetzend).
- f werde durch $f(-t) = f(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ zu einer geraden Funktion fortgesetzt.
- f erfülle die Voraussetzungen für den Satz über die Fourier-Umkehrformel:
  - Stückweise Stetigkeit auf endlich vielen Intervallen,
  - Rechtsseitige und linksseitige Ableitung existiert,
  - $\|f(t)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty$.
- Das Spektrum von f sei beschränkt, d.h. für ein $\omega_0 > 0$ gilt: $\mathcal{F}[f](\omega) = 0$ für $|\omega| > \omega_0$.

Dann gilt: Tastet man f zu den Zeitpunkten

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ab, so kann f aus diesen Informationen für alle t exakt rekonstruiert werden.

Beweis: Unter den Voraussetzungen für die Fourier-Umkehrformel gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

Setze $\hat{f}(\omega)$ zu einer $2\omega_0$-periodischen Funktion fort, mit

Beweis: Unter den Voraussetzungen für die Fourier-Umkehrformel gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

Setze $\hat{f}(\omega)$ zu einer $2\omega_0$-periodischen Funktion fort, mit

$$\hat{f}(\omega \pm 2\omega_0) = \hat{f}(\omega).$$

Dann besitzt die Fourier-Reihe

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \frac{\pi}{\omega_0} \omega}$$

die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{-ik \frac{\pi}{\omega_0} \omega} \, d\omega$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man mit der Fourier-Umkehrformel schreiben als

$$c_k = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-k \frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(k \frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f(t_k)$$

Dann besitzt die Fourier-Reihe

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{\omega_0}\omega}$$

die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{-ik\frac{\pi}{\omega_0}\omega}\, d\omega$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man mit der Fourier-Umkehrformel schreiben als

$$c_k = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f(t_k)$$

Setzt man die Darstellung von $\hat{f}$ in die Umkehrformel ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\, d\omega, \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{i(t+k\pi/\omega_0)}\left[e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\right]_{\omega=-\omega_0}^{\omega=\omega_0} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\omega_0 c_k \frac{1}{\omega_0 t + k\pi}\sin(\omega_0 t + k\pi). \end{aligned}$$

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{-ik\frac{\pi}{\omega_0}\omega}\, d\omega$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man mit der Fourier-Umkehrformel schreiben als

$$c_k = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f(t_k)$$

Setzt man die Darstellung von $\hat{f}$ in die Umkehrformel ein, so bekommt man

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\, d\omega, \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{i(t+k\pi/\omega_0)} \left[e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\right]_{\omega=-\omega_0}^{\omega=\omega_0} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\omega_0 c_k \frac{1}{\omega_0 t + k\pi} \sin(\omega_0 t + k\pi). \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) \frac{\sin(\omega_0 t + k\pi)}{\omega_0 t + k\pi} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Laplace-Transformation

Problemstellung:

- Betrachte: Die Heaviside-Funktion

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ 1 & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

- Beobachte: $u(t)$ besitzt **keine** Fourier-Transformation
- Begründung: Das folgende unbestimmte Integral existiert für $\omega \neq 0$ nicht:

$$\mathcal{F}[u](\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{i\omega}\left(1 - \lim_{t\to\infty}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))\right).$$

- Oder: $u \notin L_1(\mathbb{R})$.

Frage: Gibt es eine alternative Integralformel?

Idee: Konvergenzerzeugender Faktor

- Voraussetzung: ab jetzt sei $f(t) = 0$ für $t < 0$, so dass formal

$$g(\omega) := \mathcal{F}[f](\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

- Damit die Konvergenz zu erzwingen, verwende $e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$) und betrachte das uneigentliche Integral

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} F(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau, \quad \text{mit } F(\tau) = e^{-\alpha\tau}f(\tau).$$

Also ist:

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\,d\tau.$$

Bemerkung: Unter geeigneten Voraussetzungen and f geben die Fourier-Umkehrformeln

Laplace-Transformation von Ableitungen.

Erfüllt f' für $f \in C^1$ die Voraussetzungen des vorigen Satzes zur Existenz der Laplace-Transformation, so bekommt man für die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(f')](s) = \int_0^{\infty} f'(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$$

mit partieller Integration

$$[\mathcal{L}(f')](s) = \left[f(\tau)e^{-s\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} + s\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau,$$

so dass mit (der angegebenen Voraussetzung) $\lim_{\tau\to\infty} f(\tau)e^{-s\tau} = 0$ gilt

$$[\mathcal{L}(f')](s) = s \cdot [\mathcal{L}(f)](s) - f(0).$$

Für höhere Ableitungen von f gilt unter entsprechenden Voraussetzungen

$$\left[\mathcal{L}(f^{(n)})\right](s) = s^n \cdot [\mathcal{L}(f)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0).$$

Erster Verschiebungssatz: Es gilt der erste Verschiebungssatz

$$\left[\mathcal{L}(e^{-kt}f(t))\right](s) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-(s+k)\tau}\,d\tau = [\mathcal{L}(f(t))](s+k)$$

für $\mathrm{Re}(s) > \max(\gamma_0, \gamma_0 - k)$. Mit der Rücktransformation erhält man

$$\left[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))\right](t) = e^{-kt}\mathcal{L}^{-1}[\phi(s-k)](t).$$

Zweiter Verschiebungssatz: Es gilt der zweite Verschiebungssatz

$$[\mathcal{L}(f(t-k))](s) = e^{-ks}[\mathcal{L}(f(t))](s).$$

Konstruktion der Laplace-Transformation.

Ausgangspunkt: Mit der Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{(\alpha+i\omega)t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-(\alpha+i\omega)\tau}e^{(\alpha+i\omega)t}\,d\tau\,d\omega$$

und der Substitution $s = \alpha + i\omega \in \mathbb{C}$ erhält man mit dem Symbol

$$[\mathcal{L}(f)](s) := G\left(\frac{s-\alpha}{i}\right) = G(\omega)$$

die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau =: \phi(s)$$

sowie die Laplace-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \phi(s)e^{st}\,ds =: \left[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))\right](t).$$

Beispiel: Für die Heaviside-Funktion

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

gilt

$$[\mathcal{L}(u)](s) = \phi(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau}\,d\tau = -\frac{1}{s}\left[e^{-s\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} = \frac{1}{s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 0$. In diesem Fall ist $\gamma_0 = 0$ die Konvergenzabszisse.

Satz: *Für die Faltung (Konvolution)*

$$(f * g)(t) = \int_0^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

zweier Funktionen f und g gilt (unter den vorigen Voraussetzungen) die Formel

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

Satz: *Sei f auf $[0,\infty)$* lokal integrierbar*, und es gelte*

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

mit geeigneten Konstanten M und γ, so existiert die Laplace-Transformation

$$\phi(s) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \gamma$.

Das Infimum aller γ mit obiger Abschätzung heißt Konvergenzabszisse von f.

Definition: *Falls für f das uneigentliche Integral*

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = \phi(s)$$

existiert, so bezeichnet man ϕ als `Laplace-Transformation` *von f.*

Falls für ϕ das uneigentliche Integral

$$\left[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))\right](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \phi(s)e^{st}\,ds$$

existiert, so bezeichnet man $\mathcal{L}^{-1}(\phi)$ als `inverse Laplace-Transformation` *von ϕ. Der Integraloperator $\mathcal{L}^{-1}$ wird entsprechend als* `inverse Laplace-Transformation` *bezeichnet.*

Somit gilt (unter geeigneten Voraussetzungen)

$$\phi(s) = [\mathcal{L}(f)](s) \qquad \text{und} \qquad f(t) = [\mathcal{L}^{-1}(\phi)](t).$$

Problemstellung:

- Betrachte: Die Heaviside-Funktion

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ 1 & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

- Beobachte: $u(t)$ besitzt keine Fourier-Transformation
- Begründung: Das folgende unbestimmte Integral existiert für $\omega \neq 0$ nicht:

$$\mathcal{F}[u](\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{i\omega}\left(1 - \lim_{t\to\infty}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))\right).$$

- Oder: $u \notin L_1(\mathbb{R})$.

Frage: Gibt es eine alternative Integralformel?

Idee: Konvergenzerzeugender Faktor

- Voraussetzung: ab jetzt sei $f(t) = 0$ für $t < 0$, so dass formal

$$g(\omega) := \mathcal{F}[f](\omega) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

- Damit: Um Konvergenz zu erzwingen, verwende e^{-at} $(a > 0)$ und betrachte das uneigentliche Integral

$$G(\omega) = \int_0^\infty F(\tau)e^{-i\omega\tau}\, d\tau, \quad \text{mit } F(\tau) = e^{-at}f(\tau).$$

  Also ist

$$G(\omega) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-(a+i\omega)\tau}\, d\tau.$$

Bemerkung: Unter geeigneten Voraussetzungen and f gelten die Fourier-Umkehrformeln

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{infty} G(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{infty} G(\omega)e^{(a+i\omega)t}\, d\omega \end{aligned}$$

Konstruktion der Laplace-Transformation.

Ausgangspunkt: Mit der Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{(a+i\omega)t} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(\tau) e^{-(a+i\omega)\tau} e^{(a+i\omega)t} \, d\tau \, d\omega$$

und der Substitution $s = a + i\omega \in \mathbb{C}$ erhält man mit dem Symbol

$$[\mathcal{L}(f)](s) := G\left(\frac{s-a}{i}\right) = G(\omega)$$

die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_{0}^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} \, d\tau =: \phi(s)$$

sowie die Laplace-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \phi(s) e^{st} \, ds =: \left[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))\right](t).$$

Definition: *Falls für* f *das uneigentliche Integral*

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = \phi(s)$$

existiert, so bezeichnet man ϕ *als* `Laplace-Transformation` *von* f*.*

Falls für ϕ *das uneigentliche Integral*

$$\left[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))\right](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \phi(s)e^{st}\,ds$$

existiert, so bezeichnet man $\mathcal{L}^{-1}(\phi)$ *als* `inverse Laplace-Transformation` *von* ϕ*. Der Integraloperator* $\mathcal{L}^{-1}$ *wird entsprechend als* `inverse Laplace-Transformation` *bezeichnet.*

Somit gilt (unter geeigneten Voraussetzungen)

$$\phi(s) = [\mathcal{L}(f)](s) \qquad \textit{und} \qquad f(t) = [\mathcal{L}^{-1}(\phi)](t).$$

Satz: *Sei* f *auf* $(0, \infty)$ `lokal integrierbar`, *und es gelte*

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

mit geeigneten Konstanten M *und* γ, *so existiert die Laplace-Transformation*

$$\phi(s) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} \, d\tau$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(s) > \gamma$.

Das Infimum aller γ mit obiger Abschätzung heißt `Konvergenzabzisse` von f.

Beispiel Für die `Heaviside-Funktion`

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

gilt

$$[\mathcal{L}(u)](s) = \phi(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}\, d\tau = -\frac{1}{s}\left[e^{-s\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} = \frac{1}{s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 0$. In diesem Fall ist $\gamma_0 = 0$ die Konvergenzabzisse.

Laplace-Transformation von Ableitungen.

Erfüllt f' für $f \in C^1$ die Voraussetzungen des vorigen Satzes zur Existenz der Laplace-Transformation, so bekommt man für die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(f')]\,(s) = \int_0^\infty f'(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$$

mit partieller Integration

$$[\mathcal{L}(f')]\,(s) = \left[f(\tau)e^{-s\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} + s\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau,$$

so dass mit (der angegebenen Voraussetzung) $\lim_{\tau\to\infty} f(\tau)e^{-s\tau} = 0$ gilt

$$[\mathcal{L}(f')]\,(s) = s \cdot [\mathcal{L}(f)](s) - f(0).$$

Für höhere Ableitungen von f gilt unter entsprechenden Voraussetzungen

$$\left[\mathcal{L}(f^{(n)})\right](s) = s^n \cdot [\mathcal{L}(f)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0).$$

Erster Verschiebungssatz: Es gilt der `erste Verschiebungssatz`

$$\left[\mathcal{L}(e^{-kt}f(t))\right](s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-(s+k)\tau}\,d\tau = [\mathcal{L}(f(t))](s+k)$$

für $\mathrm{Re}(s) > \max(\gamma_0, \gamma_0 - k)$. Mit der Rücktransformation erhält man

$$\left[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))\right](t) = e^{-kt}\mathcal{L}^{-1}[(\phi(s-k))](t),$$

Zweiter Verschiebungssatz: Es gilt der `zweite Verschiebungssatz`

$$[\mathcal{L}(f(t-k))](s) = e^{-sk}[\mathcal{L}(f(t))](s).$$

Satz: *Für die* Faltung *(*Konvolution*)*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

zweier Funktionen f *und* g *gilt (unter den vorigen Voraussetzungen) die Formel*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

Zusammenfassung

Funktionen

Definition: (Komplexe Funktion)
Eine komplexe Funktion ist eine Funktion, deren Definitions- und Wertebereich jeweils Mengen der komplexen Ebene sind

$$f: A \to B, \quad A, B \subset \mathbb{C}$$

- lineare Funktionen
- quadratische Funktionen
- Exponentialfunktion
- Umkehrfunktion

Residuum

- Vereinfachung der Integration
- Zusammenhang mit Singularitäten

Spezielle Funktionen

Definition: (Joukowski-Funktion)
Die Joukowski-Funktion ist definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

- Logarithmus
- Potenz
- Trigonometrische Funktionen

Singularitäten

- Satz von Riemann (hebbare Singularität)
- Satz von Casorati-Weierstrass (wesentliche Singularität)
- Laurent-Reihe und Singularitäten

Fourier- und Laplace-Transformation

- Lösung (partieller) Differentialgleichungen

Transformationen

Stereographische Projektion

Möbius-Transformation

Taylor/Laurent-Reihe

Differenzierbarkeit

Stammfunktion und Eigenschaften

- Erweiterung auf mehrfach zusammenhängende Gebiete
- Cauchysche Integralformel
- Cauchysche Integralformel für Ableitungen

Konforme Transformationen

Ziel: Lösung von Potentialproblemen!

Integration

- Berechnung
- Rechenregeln

Funktionen

Definition: (Komplexe Funktion)
Eine komplexe Funktion ist eine Funktion, deren Definitions- und Wertebereich jeweils Mengen der Komplexen Ebene sind:

$$f : A \to B, \quad A, B \subset \mathbb{C}.$$

- lineare Funktionen
- quadratische Funktionen
- Exponentialfunktion
- Umkehrfunktion

Spezielle Funktionen

Definition: (Joukowski-Funktion)
Die Joukowski-Funktion ist definiert durch

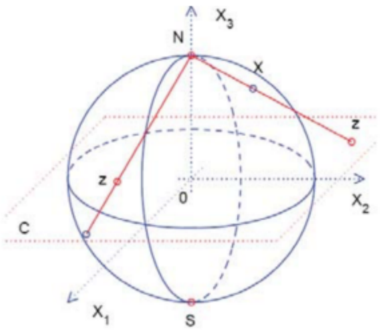
$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

- Logarithmus
- Potenz
- Trigonometrische Funktionen

Transformationen

Stereographische Projektion

$$z = P(X) = \frac{X_1 + iX_2}{1 - X_3} \in \mathbb{C}^* \quad \text{für } X = (X_1, X_2, X_3)^\top \in \mathbb{S}^2$$

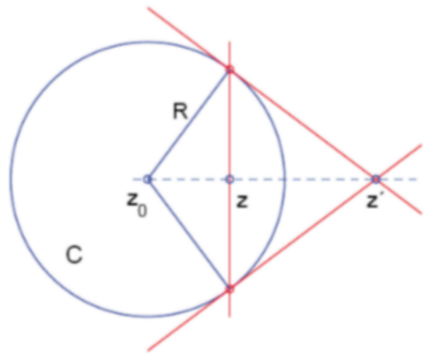


Möbius-Transformation

Definition: (Möbius Transformation)
Eine rationale Abbildung der Form

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad \neq bc$$

heißt Möbius Transformation.



Differenzierbarkeit

Definition: (Differential)
Das Differential der Funktion $f = u + iv$ im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ ist definiert als die (in dx und dy) lineare Funktion

$$df = du + idv.$$

Bemerkung: Die Funktion $f = u + iv$ ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

erfüllen.

Definition: *Eine komplexe Funktion* $f(z)$, $z \in D(f)$, *heißt* `analytisch` *(bzw.* `holomorph`*), falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

- $D(f)$ *ist ein Gebiet;*
- f *ist in jedem Punkt* $z \in D(f)$ *komplex differenzierbar.*

Konforme Transformationen

Ziel: Lösung von Potentialproblemen!

Definition: (konforme Transformation)
Mit obigen Voraussetzungen gibt es eine Abbildung

$$\Psi := \Phi(f^{-1}) : G' \to \mathbb{R}$$

Oder: $\Psi(x,y) : (x,y) \mapsto \Psi(x,y) = \Psi(w)_\Phi(f^{-1}(w)) \in \mathbb{R}$ für $w \in G'$.
Die so definierte Abbildung Ψ heißt konforme Transformation von Φ mit der Abbildung f.

- **Hilfsmittel**: Transformationssätze
- **Idee**: Verwende konforme Transformationen
- **Gegeben**: Potentialproblem in der z-Ebene
  (physikalische Ebene/physikalische Koordinaten)
- **Transformation**: Transformiere das Problem konform in die w-Ebene
  (Modellebene)
- **Vereinfachung**: Löse das Problem (leicht) in der Modellebene
- **Lösung**: Rücktransformation in die z-Ebene liefert Lösung
  (physikalische Ebene)

Integration

Definition: (Komplexes Kurvenintegral)
Falls für jede Zerlegungsfolge $z_0, \dots, z_n$ für Γ mit

$$\max_{0 \le k < n} |\Delta z_k| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

und jede Wahl von Zwischenpunkten $\zeta_k \in \Gamma|_{[z_k, z_{k+1}]}$ der Grenzwert der Partialsummen existiert und jeweils den selben Wert ergibt, so wird der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k =: \int_\Gamma f(z)\, dz$$

als Integral der Funktion f längs der Kurve Γ bezeichnet.
Man spricht vom komplexen Kurvenintegral des Integranden f auf dem Integrationsweg Γ.

- Berechnung
- Rechenregeln

Satz: (Cauchyscher Integralsatz)
Sei $f : D \to W$ auf dem einfachen zusammenhängenden Gebiet $G \subset D$ analytisch.
Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Stammfunktion und Eigenschaften

Satz: (Hauptsatz der komplexen Integralrechnung)
Sei f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und sei $z_0 \in G$. Dann ist die Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

für $z \in G$ analytisch und es gilt

$$F'_{z_0} = f \quad \text{auf } G.$$

- Erweiterung auf mehrfach zusammenhängende Gebiete
- Cauchysche Integralformel
- Cauchysche Integralformel für Ableitungen

Taylor/Laurent-Reihe

Satz: (Taylor-Reihe)
Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. Dann konvergiert die Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

gegen $f(z)$ für alle z innerhalb des größten Kreises um a, dessen inneres ganz in G enthalten ist ($z \in B_r(a) \subset G$).

Satz: (Laurent-Reihenentwicklung)
Sei f analytisch im Kreisring $R = R_{r_1}^{r_2}(a)$ und sei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

wobei $\Gamma \subset R$ eine beliebige Kurve ist, die $B_{r_1}(a)$ einmal im positiven Sinne umläuft.
Dann gilt die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in R.$$

Singularitäten

Definition: (isolierte Singularität)
Sei eine analytische Funktion f definiert in einem Kreisring

$$B_r(a)\backslash\{a\} = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z - a| <\},$$

wobei $r > 0$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt a isolierte Singularität.

- Satz von Riemann (hebbare Singularität)
- Satz von Casorati-Weierstrass (wesentliche Singularität)
- Laurent-Reihe und Singularitäten

Residuum

Definition: (Residuum) Die Funktion f besitze in a eine isolierte Singularität. Sei dann die Laurent-Reihe von f in der Umgebung von a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{für } 0 < |z-a| < r.$$

Der Koeffizient $c_{-1} \in \mathbb{C}$ heißt Residuum von f in a:

$$\mathrm{Res} f(a) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Res} f(z)|_{z=a}.$$

- Vereinfachung der Integration
- Zusammenhang mit Singularitäten

Fourier- und Laplace-Transformation

Definition: (Fourier-Transformierte)
Falls das Integral

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert, so ist die Funktion g die Fourier-Transformierte von f

Definition: *Falls für* f *das uneigentliche Integral*

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} \, d\tau = \phi(s)$$

existiert, so bezeichnet man ϕ *als* `Laplace-Transformation` *von* f.

- Lösung (partieller) Differentialgleichungen

Anwendung: Potentialgleichung

Theorem von Shannon

Anwendung: Lösung von gew. DGL

Laplace-Transformation

Erinnerung

Zusammenfassung