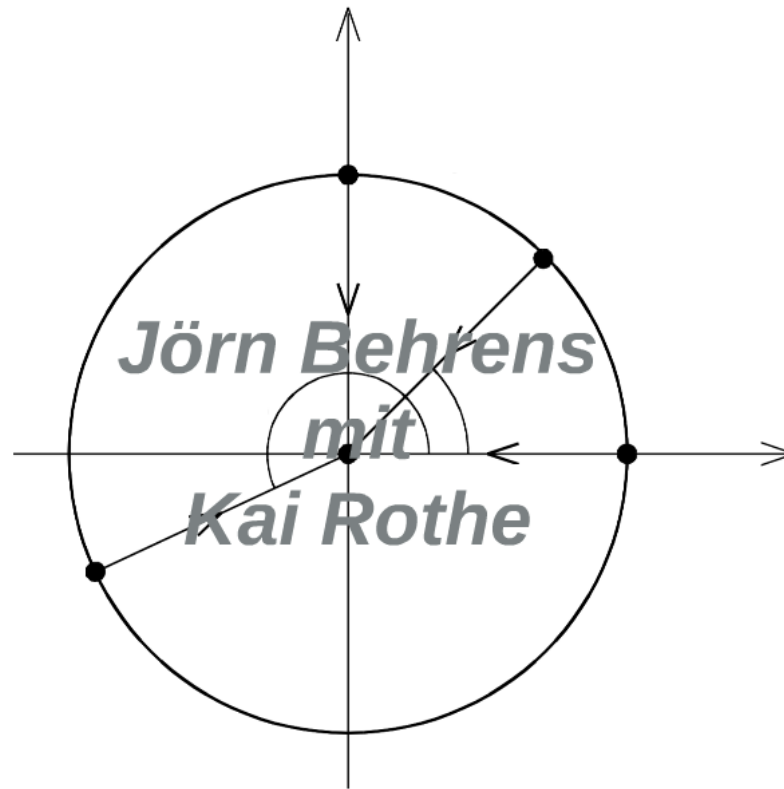


Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Laplace-Transformation

Erinnerung

Definition: (Fourier-Transformierte)

Falls das Integral

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert, so ist die Funktion g die **Fourier-Transformierte** von f .

Satz: (Existenz der Fourier-Umkehrformel)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf jedem endlichen reellen Intervall stückweise stetig. Weiterhin besitze f in jedem Punkt eine linksseitige und rechtsseitige Ableitung und es existiere das Integral

$$\|f(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt.$$

Dann gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega.$$

Ausgangspunkt: Die (kontinuierliche) Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

- \mathcal{F} ist ein linearer **Integraloperator** bzw. **Integraltransformation**, d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f+g](\omega) &= \mathcal{F}f(\omega) + \mathcal{F}g(\omega) \\ \mathcal{F}[\alpha f](\omega) &= \alpha \mathcal{F}f(\omega) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Für die **Konjugation** $\bar{\cdot}$ von f gilt

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \overline{\mathcal{F}f(-\omega)}.$$

- Für die **Streckung** $f(c)$, $c > 0$, von f gilt

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c} \mathcal{F}f(\omega/c).$$

- **Verschiebungssätze:** Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t-a)](\omega) &= e^{-i\omega a} \mathcal{F}f(\omega) \\ \mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\omega) &= \mathcal{F}f(\omega-a) \end{aligned}$$

- **Faltungssätze:** Für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ist die **Faltung** $f * g$ zwischen f und g definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) d\tau.$$

Es gelten die **Faltungssätze**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\omega) &= \mathcal{F}f(\omega) \cdot \mathcal{F}g(\omega) \\ \mathcal{F}[f \cdot g](\omega) &= \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}f * \mathcal{F}g)(\omega) \end{aligned}$$

Satz: (Plancherel der Fourier-Transformation)

Sei f eine lokal beschränkte Funktion mit (üblicherweise) endlichem Energieintegral $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$, und die f von f^* absolut integrierbar, d.h.

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \text{und} \quad \|f^*\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f^*(t)| dt < \infty.$$

so gilt

$$\mathcal{F}f^*(\omega) = -i\omega \mathcal{F}f(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (f(t_k) - f(t_{k+1})) e^{-i\omega t_k}.$$



Definition: (Fourier-Transformierte)

Falls das Integral

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert, so ist die Funktion g die **Fourier-Transformierte** von f .

Satz: (Existenz der Fourier-Umkehrformel)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf jedem endlichen reellen Intervall stückweise stetig. Weiterhin besitze f in jedem Punkt eine linksseitige und rechtsseitige Ableitung und es existiere das Integral

$$\|f(t)\|_{L_1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt.$$

Dann gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega.$$

Ausgangspunkt: Die (kontinuierliche) Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

- \mathcal{F} ist ein linearer **Integraloperator** bzw. **Integraltransformation**, d.h.

$$\mathcal{F}[f + g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega)$$

$$\mathcal{F}[\alpha f](\omega) = \alpha \mathcal{F}[f](\omega) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}$$

- Für die **Konjugation** \bar{f} von f gilt

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(-t)](\omega)}.$$

- Für die **Streckung** $f(c\cdot)$, $c > 0$, von f gilt

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c} \mathcal{F}[f](\omega/c).$$

$$\mathcal{F}[f + g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega)$$

$$\mathcal{F}[\alpha f](\omega) = \alpha \mathcal{F}[f](\omega) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}$$

- Für die **Konjugation** \bar{f} von f gilt

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(-t)](\omega)}.$$

- Für die **Streckung** $f(c \cdot)$, $c > 0$, von f gilt

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c} \mathcal{F}[f](\omega/c).$$

- **Verschiebungssätze:** Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathcal{F}[f(t - a)](\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F}[f](\omega)$$

$$\mathcal{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - a)$$

- **Faltungssätze:** Für $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ist die **Faltung** $f * g$ zwischen f und g definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau.$$

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c} \mathcal{F}[f](\omega/c).$$

- **Verschiebungssätze:** Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathcal{F}[f(t - a)](\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F}[f](\omega)$$

$$\mathcal{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - a)$$

- **Faltungssätze:** Für $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ist die **Faltung** $f * g$ zwischen f und g definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Es gelten die **Faltungssätze**

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)$$

$$\mathcal{F}[f \cdot g](\omega) = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(\omega)$$

Satz: (Differentiation der Fourier-Transformation)

Ist f eine stückweise C^1 -Funktion mit (höchstens) endlich vielen Unstetigkeitsstellen t_1, \dots, t_m und sind f und f' absolut integrierbar, d.h.

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \text{und} \quad \|f'\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)| dt < \infty$$

so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega) - \sum_{k=1}^m (f(t_k^+) - f(t_k^-)) e^{-i\omega t_k}.$$

Anwendung: Lösung von gew. DGL

Ziel: Bestimme die Lösung der (gewöhnlichen) Differentialgleichung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t).$$

Annahmen: (Wachstumsbedingungen)

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} y'(t) = 0$$

Fourier-Transformation: Mit der Regel für die Ableitung gilt

$$(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega),$$

wobei

$$Y = \mathcal{F}[y] \quad \text{und} \quad C = \mathcal{F}[c].$$

Erhalte:

$$Y(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega a + b} C(\omega).$$

Rücktransformation: Mit Faltungssatz erhalte

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega. \quad \text{①}$$

Ziel: Bestimme die Lösung der (gewöhnlichen) Differentialgleichung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t).$$

Annahmen: (Wachstumsbedingungen)

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} y'(t) = 0$$

Fourier-Transformation: Mit der Regel für die Ableitung gilt

$$(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega),$$

wobei

$$Y = \mathcal{F}[y] \quad \text{und} \quad C = \mathcal{F}[c].$$

Erhalte:

$$Y(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega a + b} C(\omega).$$

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} y'(t) = 0$$

Fourier-Transformation: Mit der Regel für die Ableitung gilt

$$(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega),$$

wobei

$$Y = \mathcal{F}[y] \quad \text{und} \quad C = \mathcal{F}[c].$$

Erhalte:

$$Y(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega a + b} C(\omega).$$

Rücktransformation: Mit Faltungssatz erhalte

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega.$$

Anwendung: Potentialgleichung

Ausgangspunkt: Betrachte das **Potentialproblem** auf der Halbebene.

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x).\end{aligned}$$

Fourier-Transformation bez. der Ortsvariablen x ergibt

$$U_{yy}(\omega, y) = -(i\omega)^2 U(\omega, y) = \omega^2 U(\omega, y)$$

und somit

$$U(\omega, y) = C_1 e^{|\omega|y} + C_2 e^{-|\omega|y}$$

Da die Lösung für $|y| \rightarrow \infty$ verschwindet, gilt $C_1 = 0$ und somit

$$U(\omega, y) = U_0(y) e^{-|\omega|y}.$$

Es gilt $\mathcal{F}^{-1}[e^{-|\omega|y}] = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{y^2 + x^2}$ und weiterhin mit dem Faltungssatz

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} u_0(\xi) d\xi.$$

Potentialgleichung

Ausgangspunkt: Betrachte das **Potentialproblem** auf der Halbebene.

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x).\end{aligned}$$

Fourier-Transformation bez. der Ortsvariablen x ergibt

$$U_{yy}(\omega, y) = -(i\omega)^2 U(\omega, y) = \omega^2 U(\omega, y)$$

und somit

$$U(\omega, y) = C_1 e^{|\omega|y} + C_2 e^{-|\omega|y}$$

Da die Lösung für $|y| \rightarrow \infty$ verschwindet, gilt $C_1 = 0$ und somit

$$U(\omega, y) = U_0(y) e^{-|\omega|y}.$$

Es gilt $\mathcal{F}^{-1} [e^{-|\omega|y}] = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{y^2 + x^2}$ und weiterhin mit dem Faltungssatz

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x).\end{aligned}$$

Fourier-Transformation bez. der Ortsvariablen x ergibt

$$U_{yy}(\omega, y) = -(i\omega)^2 U(\omega, y) = \omega^2 U(\omega, y)$$

und somit

$$U(\omega, y) = C_1 e^{|\omega|y} + C_2 e^{-|\omega|y}$$

Da die Lösung für $|y| \rightarrow \infty$ verschwindet, gilt $C_1 = 0$ und somit

$$U(\omega, y) = U_0(y) e^{-|\omega|y}.$$

Es gilt $\mathcal{F}^{-1} [e^{-|\omega|y}] = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{y^2 + x^2}$ und weiterhin mit dem Faltungssatz

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} u_0(\xi) d\xi.$$

Theorem von Shannon

Theorem: (Abtasttheorem von Shannon)

Voraussetzungen:

- Sei $f(t)$ ein für $t \geq 0$ definiertes Signal (bei $t = 0$ einsetzend).
- f werde durch $f(-t) = f(t)$ auf ganz \mathbb{R} zu einer geraden Funktion fortgesetzt.
- f erfülle die Voraussetzungen für den Satz über die Fourier-Umkehrformel:
 - Stückweise Stetigkeit auf endlich vielen Intervallen,
 - Rechtsseitige und linksseitige Ableitung existiert,
 - $\|f(t)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty$.
- Das Spektrum von f sei beschränkt, d.h. für ein $\omega_0 > 0$ gilt: $\mathcal{F}[f](\omega) = 0$ für $|\omega| > \omega_0$.

Dann gilt: Tastet man f zu den Zeitpunkten

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ab, so kann f aus diesen Informationen für alle t exakt rekonstruiert werden.

Beweis: Unter den Voraussetzungen für die Fourier-Umkehrformel gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Setze $\hat{f}(\omega)$ zu einer Zeit-periodischen Funktion fort, mit

$$\hat{f}(\omega + 2\omega_0) = \hat{f}(\omega).$$

Dann lautet die Fourier-Reihe

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\pi\omega/\omega_0}$$

die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{-ik\pi\omega/\omega_0} d\omega$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man mit der Fourier-Umkehrformel schreiben als

$$c_k = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-\frac{k\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(\frac{k\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f(t_k)$$

Setzt man die Darstellung von \hat{f} in die Umkehrformel ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega t} e^{ik\pi\omega/\omega_0} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t + k\pi/\omega_0)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{i(t + k\pi/\omega_0)} \left[e^{i\omega(t + k\pi/\omega_0)} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\omega_0 c_k \frac{1}{\omega_0 t + k\pi} \text{sinc}(\omega_0 t - k\pi) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) \frac{\text{sinc}(\omega_0 t - k\pi)}{\omega_0 t + k\pi} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Theorem: (Abtasttheorem von Shannon)

Voraussetzungen:

- Sei $f(t)$ ein für $t \geq 0$ definiertes Signal (bei $t = 0$ einsetzend).
- f werde durch $f(-t) = f(t)$ auf ganz \mathbb{R} zu einer geraden Funktion fortgesetzt.
- f erfülle die Voraussetzungen für den Satz über die Fourier-Umkehrformel:
 - Stückweise Stetigkeit auf endlich vielen Intervallen,
 - Rechtsseitige und linksseitige Ableitung existiert,
 - $\|f(t)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty$.
- Das Spektrum von f sei beschränkt, d.h. für ein $\omega_0 > 0$ gilt: $\mathcal{F}[f](\omega) = 0$ für $|\omega| > \omega_0$.

Dann gilt: Tastet man f zu den Zeitpunkten

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ab, so kann f aus diesen Informationen für alle t exakt rekonstruiert werden.

Beweis: Unter den Voraussetzungen für die Fourier-Umkehrformel gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Setze $\hat{f}(\omega)$ zu einer $2\omega_0$ -periodischen Funktion fort, mit

Beweis: Unter den Voraussetzungen für die Fourier-Umkehrformel gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Setze $\hat{f}(\omega)$ zu einer $2\omega_0$ -periodischen Funktion fort, mit

$$\hat{f}(\omega \pm 2\omega_0) = \hat{f}(\omega).$$

Dann besitzt die Fourier-Reihe

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \frac{\pi}{\omega_0} \omega}$$

die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{-ik \frac{\pi}{\omega_0} \omega} d\omega$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man mit der Fourier-Umkehrformel schreiben als

$$c_k = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-k \frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(k \frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f(t_k)$$

Dann besitzt die Fourier-Reihe

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \frac{\pi}{\omega_0} \omega}$$

die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{-ik \frac{\pi}{\omega_0} \omega} d\omega$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man mit der Fourier-Umkehrformel schreiben als

$$c_k = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-k \frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(k \frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f(t_k)$$

Setzt man die Darstellung von \hat{f} in die Umkehrformel ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)} d\omega, \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{i(t+k\pi/\omega_0)} \left[e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)} \right]_{\omega=-\omega_0}^{\omega=\omega_0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\omega_0 c_k \frac{1}{\omega_0 t + k\pi} \sin(\omega_0 t + k\pi). \end{aligned}$$

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{-ik\frac{\pi}{\omega_0}\omega} d\omega$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man mit der Fourier-Umkehrformel schreiben als

$$c_k = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f(t_k)$$

Setzt man die Darstellung von \hat{f} in die Umkehrformel ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)} d\omega, \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{i(t+k\pi/\omega_0)} \left[e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)} \right]_{\omega=-\omega_0}^{\omega=\omega_0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\omega_0 c_k \frac{1}{\omega_0 t + k\pi} \sin(\omega_0 t + k\pi). \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) \frac{\sin(\omega_0 t + k\pi)}{\omega_0 t + k\pi} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Laplace-Transformation

Problemstellung:

- Bezeichne die Heaviside-Funktion

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ 1 & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

- Zweiteiligkeit $u(t)$ macht keine Faltungstransformation
- Begründung: Das folgende Lebesgue-Integral existiert für $u > 0$ nicht

$$\int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \lim_{x \rightarrow \infty} (s e^{-sx} - s e^{-sx})$$

- Oder $> \int_0^{\infty} u(t) dt$

Frage: Gibt es eine alternative Integralformel?

Laplace-Transformation von Ableitungen.

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die Maschinengänge des vorigen Satzes zur Existenz der Laplace-Transformation, so bekommt man für die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

mit partieller Integration

$$\mathcal{L}(f')(s) = [f(t) e^{-st}]_{t=0}^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

so dass mit (für angegebenen Voraussetzungen) $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-st} = 0$ gilt

$$[\mathcal{L}(f')(s) = s \cdot [\mathcal{L}(f)](s) - f(0).$$

Für höhere Ableitungen von f gilt unter entsprechenden Voraussetzungen

$$[\mathcal{L}(f^{(k)})](s) = s^k \cdot [\mathcal{L}(f)](s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-j-1} f^{(j)}(0).$$

Satz: Partiellebruchzerlegung

$$\frac{1}{s^2 + 1} = \frac{0}{s-i} + \frac{1}{s+i}$$

oder

$$\frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i} \right)$$

die Partialzerlegung von $\frac{1}{s^2 + 1}$ in die Partialbrüche.

Satz: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ lokal integrierbar und es gelte

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad \text{für alle } t \geq 0$$

mit geeigneten Konstanten M und γ , so existiert die Laplace-Transformation

$$\phi(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \gamma$.

Das Integral ϕ ist mit dieser Abschätzung falls $\operatorname{Re}(s) > \gamma$ konvergent.

Erster Verschiebungssatz: Es gilt die erste Verschiebungssatz

$$[\mathcal{L}(e^{-\lambda t} f(t))](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s+\lambda)t} dt = [\mathcal{L}(f)](s+\lambda)$$

für $\operatorname{Re}(s) > \max\{\operatorname{Re}(s_0), \gamma - \lambda\}$. Mit der Rücktransformation erhält man

$$[\mathcal{L}^{-1}(\phi)](t) = e^{-\lambda t} \mathcal{L}^{-1}(\phi)(t-k)(t).$$

Zweiter Verschiebungssatz: Es gilt der zweite Verschiebungssatz

$$[\mathcal{L}(f)(s-k)](s) = e^{-kt} [\mathcal{L}(f)](s).$$

Satz: Für die Heaviside-Funktion

$$[\mathcal{L}(u)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

zweier Funktionen f und g (unter den vorigen Voraussetzungen) die Formel

$$[\mathcal{L}(f * g)](s) = [\mathcal{L}(f)](s) \cdot [\mathcal{L}(g)](s)$$

Wiss: Konvergenzgebiete

- Voraussetzung: ab jetzt sei $f(t) = 0$ für $t < 0$, so dass formal

$$\phi(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

- Exist: Ein Konvergenzgebiet $\sigma > \gamma$ (sogar $\sigma = \gamma$) und Bereiche für ungerichtete Kreise

$$\phi(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad \text{mit } f(t) = e^{-\lambda t} f(t).$$

$$\phi(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad \text{mit } f(t) = e^{-\lambda t} f(t).$$

Bemerkung: Unter geeigneten Voraussetzungen f behält die Kreise-Lokalität

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Konstruktion der Laplace-Transformation.

Ausgangspunkt: Mit der Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \phi(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(t) e^{-s(t-\tau)} e^{s\tau} ds$$

und der Substitution $s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ erhält man mit dem Symbol

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{|s|} \right) = \mathcal{O}(\omega)$$

die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \phi(s)$$

sowie die Laplace-Übelsformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \phi(s) e^{st} ds = [\mathcal{L}^{-1}(\phi)](t).$$

Definition: Falls für f das uneigentliche Integral

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \phi(s)$$

existiert, so bezeichnet man ϕ als Laplace-Transformation von f .

Falls für ϕ das uneigentliche Integral

$$[\mathcal{L}^{-1}(\phi)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \phi(s) e^{st} ds$$

existiert, so bezeichnet man $\mathcal{L}^{-1}(\phi)$ als inverse Laplace-Transformation von ϕ . Der Integraloperator \mathcal{L}^{-1} wird entsprechend als inverse

Laplace-Transformation bezeichnet.

Somit gilt (unter geeigneten Voraussetzungen)

$$\phi(s) = [\mathcal{L}(f)](s) \quad \text{und} \quad f(t) = [\mathcal{L}^{-1}(\phi)](t).$$

Problemstellung:

- Betrachte: Die Heaviside-Funktion

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ 1 & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

- Beobachte: $u(t)$ besitzt keine Fourier-Transformation
- Begründung: Das folgende unbestimmte Integral existiert für $\omega \neq 0$ nicht:

$$\mathcal{F}[u](\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \right).$$

- Oder: $u \notin L_1(\mathbb{R})$.

Frage: Gibt es eine alternative Integralformel?

Idee: Konvergenzerzeugender Faktor

- Voraussetzung: ab jetzt sei $f(t) = 0$ für $t < 0$, so dass formal

$$g(\omega) := \mathcal{F}[f](\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

- Damit: Um Konvergenz zu erzwingen, verwende e^{-at} ($a > 0$) und betrachte das uneigentliche Integral

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} F(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad \text{mit } F(\tau) = e^{-at} f(\tau).$$

Also ist

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(a+i\omega)\tau} d\tau.$$

Bemerkung: Unter geeigneten Voraussetzungen and f gelten die Fourier-Umkehrformeln

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{(a+i\omega)t} d\omega$$

Konstruktion der Laplace-Transformation.

Ausgangspunkt: Mit der Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{(a+i\omega)t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(a+i\omega)\tau} e^{(a+i\omega)t} d\tau d\omega$$

und der Substitution $s = a + i\omega \in \mathbb{C}$ erhält man mit dem Symbol

$$[\mathcal{L}(f)](s) := G\left(\frac{s-a}{i}\right) = G(\omega)$$

die **Laplace-Transformation**

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau =: \phi(s)$$

sowie die **Laplace-Umkehrformel**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \phi(s) e^{st} ds =: [\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))](t).$$

Definition: Falls für f das uneigentliche Integral

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \phi(s)$$

existiert, so bezeichnet man ϕ als **Laplace-Transformation** von f .

Falls für ϕ das uneigentliche Integral

$$[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \phi(s) e^{st} ds$$

existiert, so bezeichnet man $\mathcal{L}^{-1}(\phi)$ als **inverse Laplace-Transformation** von ϕ . Der Integraloperator \mathcal{L}^{-1} wird entsprechend als **inverse Laplace-Transformation** bezeichnet.

Somit gilt (unter geeigneten Voraussetzungen)

$$\phi(s) = [\mathcal{L}(f)](s) \quad \text{und} \quad f(t) = [\mathcal{L}^{-1}(\phi)](t).$$

Satz: Sei f auf $(0, \infty)$ **lokal integrierbar**, und es gelte

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad \text{für alle } t \geq 0$$

mit geeigneten Konstanten M und γ , so existiert die Laplace-Transformation

$$\phi(s) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \gamma$.

Das Infimum aller γ mit obiger Abschätzung heißt **Konvergenzabzisse** von f .

Beispiel Für die **Heaviside-Funktion**

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

gilt

$$[\mathcal{L}(u)](s) = \phi(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} d\tau = -\frac{1}{s} [e^{-s\tau}]_{\tau=0}^{\tau=\infty} = \frac{1}{s}$$

für $\operatorname{Re}(s) > 0$. In diesem Fall ist $\gamma_0 = 0$ die Konvergenzabzisse.

Laplace-Transformation von Ableitungen.

Erfüllt f' für $f \in C^1$ die Voraussetzungen des vorigen Satzes zur Existenz der Laplace-Transformation, so bekommt man für die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(f')](s) = \int_0^{\infty} f'(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

mit partieller Integration

$$[\mathcal{L}(f')](s) = [f(\tau)e^{-s\tau}]_{\tau=0}^{\tau=\infty} + s \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau,$$

so dass mit (der angegebenen Voraussetzung) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau)e^{-s\tau} = 0$ gilt

$$[\mathcal{L}(f')](s) = s \cdot [\mathcal{L}(f)](s) - f(0).$$

Für höhere Ableitungen von f gilt unter entsprechenden Voraussetzungen

$$[\mathcal{L}(f^{(n)})](s) = s^n \cdot [\mathcal{L}(f)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0).$$

Erster Verschiebungssatz: Es gilt der **erste Verschiebungssatz**

$$[\mathcal{L}(e^{-kt}f(t))](s) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-(s+k)\tau} d\tau = [\mathcal{L}(f(t))](s+k)$$

für $\operatorname{Re}(s) > \max(\gamma_0, \gamma_0 - k)$. Mit der Rücktransformation erhält man

$$[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))](t) = e^{-kt} \mathcal{L}^{-1}[(\phi(s-k))](t),$$

Zweiter Verschiebungssatz: Es gilt der **zweite Verschiebungssatz**

$$[\mathcal{L}(f(t-k))](s) = e^{-sk}[\mathcal{L}(f(t))](s).$$

Satz: Für die **Faltung** (**Konvolution**)

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

zweier Funktionen f und g gilt (unter den vorigen Voraussetzungen) die Formel

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

Zusammenfassung

Funktionen

Definition (Meromorphic Funktion)
Die komplexen Funktionen f, g sind meromorph, wenn Definition- und Wertebereich von f Mengen der Form $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq a\}$ sind.

- Lineare Funktionen
- Quadratische Funktionen
- Exponentialfunktion
- Umkehrfunktionen

Residuum

Definition (Residuum)
Das Residuum einer Funktion f an einer Stelle a ist $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$

- Vereinfachung der Integration
- Zusammenhang mit Singularitäten

Spezielle Funktionen

Definition (Spezielle Funktionen)
Die **speziellen Funktionen** sind $f(z) = \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

- Logarithmus
- Potenz
- Trigonometrische Funktionen

Singularitäten

Definition (Singularität)
Eine Stelle $a \in \mathbb{C}$ ist eine **Singularität** von f , wenn f in a nicht holomorph ist.

- Satz von Riemann (hebbare Singularität)
- Satz von Casorati/Weierstrass (wesentliche Singularität)
- Laurent-Reihe und Singularitäten

Transformationen

Definition (Transformationen)
Die **Transformationen** sind $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$



Fourier- und Laplace-Transformation

Definition (Fourier- und Laplace-Transformation)
Die **Fourier- und Laplace-Transformation** sind $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

- Lösung (partieller) Differentialgleichungen

Taylor/Laurent-Reihe

Definition (Taylor-Reihe)
Die **Taylor-Reihe** einer Funktion f an der Stelle a ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$

Stammfunktion und Eigenschaften

Definition (Stammfunktion)
Die **Stammfunktion** einer Funktion f ist $F(z) = \int f(z) dz$

- Erweiterung auf mehrfach zusammenhängende Gebiete
- Cauchy'sche Integralformel
- Cauchy'sche Integralformel für Ableitungen

Differenzierbarkeit

Definition (Differenzierbarkeit)
Eine Funktion f ist **differenzierbar** in a , wenn $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z-a}$ existiert.

Konforme Transformationen

Definition (Konforme Transformationen)
Die **Konforme Transformationen** sind $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

Ziel: Lösung von Randwertproblemen

Integration

Definition (Integration)
Die **Integration** einer Funktion f über einem Gebiet G ist $\int_G f(z) dz$

Funktionen

Definition: (Komplexe Funktion)

Eine **komplexe Funktion** ist eine Funktion, deren Definitions- und Wertebereich jeweils Mengen der Komplexen Ebene sind:

$$f : A \rightarrow B, \quad A, B \subset \mathbb{C}.$$

- lineare Funktionen
- quadratische Funktionen
- Exponentialfunktion
- Umkehrfunktion

Spezielle Funktionen

Definition: (Joukowski-Funktion)

Die **Joukowski-Funktion** ist definiert durch

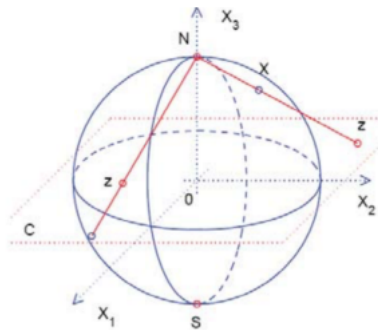
$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

- Logarithmus
- Potenz
- Trigonometrische Funktionen

Transformationen

Stereographische Projektion

$$z = P(X) = \frac{X_1 + iX_2}{1 - X_3} \in \mathbb{C}^* \quad \text{für } X = (X_1, X_2, X_3)^T \in \mathbb{S}^2$$



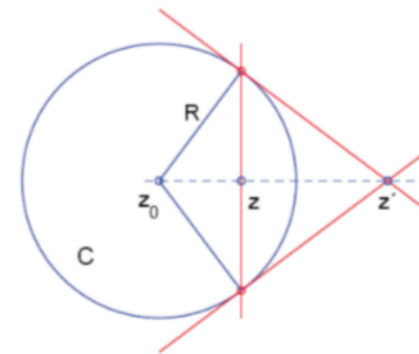
Möbius-Transformation

Definition: (Möbius Transformation)

Eine rationale Abbildung der Form

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad \neq bc$$

heißt **Möbius Transformation**.



Differenzierbarkeit

Definition: (Differential)

Das **Differential** der Funktion $f = u + iv$ im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ ist definiert als die (in dx und dy) lineare Funktion

$$df = du + idv.$$

Bemerkung: Die Funktion $f = u + iv$ ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn u und v die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

erfüllen.

Definition: Eine komplexe Funktion $f(z)$, $z \in D(f)$, heißt **analytisch** (bzw. **holomorph**), falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- $D(f)$ ist ein Gebiet;
- f ist in jedem Punkt $z \in D(f)$ komplex differenzierbar.

Konforme Transformationen

Ziel: Lösung von Potentialproblemen!

Definition: (konforme Transformation)

Mit obigen Voraussetzungen gibt es eine Abbildung

$$\Psi := \Phi(f^{-1}) : G' \rightarrow \mathbb{R}$$

Oder: $\Psi(x, y) : (x, y) \mapsto \Psi(x, y) = \Psi(w)_\Phi(f^{-1}(w)) \in \mathbb{R}$ für $w \in G'$.

Die so definierte Abbildung Ψ heißt **konforme Transformation** von Φ mit der Abbildung f .

- **Hilfsmittel:** Transformationssätze
- **Idee:** Verwende konforme Transformationen
- **Gegeben:** Potentialproblem in der z -Ebene
(physikalische Ebene/physikalische Koordinaten)
- **Transformation:** Transformiere das Problem konform in die w -Ebene
(Modellebene)
- **Vereinfachung:** Löse das Problem (leicht) in der Modellebene
- **Lösung:** Rücktransformation in die z -Ebene liefert Lösung
(physikalische Ebene)

Integration

Definition: (Komplexes Kurvenintegral)

Falls für jede Zerlegungsfolge z_0, \dots, z_n für Γ mit

$$\max_{0 \leq k < n} |\Delta z_k| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und jede Wahl von Zwischenpunkten $\zeta_k \in \Gamma|_{[z_k, z_{k+1}]}$ der Grenzwert der Partialsummen existiert und jeweils den selben Wert ergibt, so wird der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k =: \int_{\Gamma} f(z) dz$$

als **Integral der Funktion f längs der Kurve Γ** bezeichnet.

Man spricht vom **komplexen Kurvenintegral** des **Integranden f** auf dem **Integrationsweg Γ** .

- Berechnung
- Rechenregeln

Satz: (Cauchyscher Integralsatz)

Sei $f : D \rightarrow W$ auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset D$ analytisch.

Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Stammfunktion und Eigenschaften

Satz: (Hauptsatz der komplexen Integralrechnung)

Sei f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und sei $z_0 \in G$.

Dann ist die Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

für $z \in G$ analytisch und es gilt

$$F'_{z_0} = f \quad \text{auf } G.$$

- Erweiterung auf mehrfach zusammenhängende Gebiete
- Cauchysche Integralformel
- Cauchysche Integralformel für Ableitungen

Taylor/Laurent-Reihe

Satz: (Taylor-Reihe)

Sei f analytisch in G und sei $a \in G$. Dann konvergiert die **Taylor-Reihe**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

gegen $f(z)$ für alle z innerhalb des größten Kreises um a , dessen inneres ganz in G enthalten ist ($z \in B_r(a) \subset G$).

Satz: (Laurent-Reihenentwicklung)

Sei f analytisch im Kreisring $R = R_{r_1}^{r_2}(a)$ und sei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

wobei $\Gamma \subset R$ eine beliebige Kurve ist, die $B_{r_1}(a)$ einmal im positiven Sinne umläuft. Dann gilt die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in R.$$

Singularitäten

Definition: (isolierte Singularität)

Sei eine analytische Funktion f definiert in einem Kreisring

$$B_r(a) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\},$$

wobei $r > 0$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt a **isolierte Singularität**.

- Satz von Riemann (hebbare Singularität)
- Satz von Casorati-Weierstrass (wesentliche Singularität)
- Laurent-Reihe und Singularitäten

Residuum

Definition: (Residuum) Die Funktion f besitze in a eine isolierte Singularität. Sei dann die Laurent-Reihe von f in der Umgebung von a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad \text{für } 0 < |z-a| < r.$$

Der Koeffizient $c_{-1} \in \mathbb{C}$ heißt **Residuum** von f in a :

$$\operatorname{Res}f(a) \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Res}f(z)|_{z=a}.$$

- Vereinfachung der Integration
- Zusammenhang mit Singularitäten

Fourier- und Laplace-Transformation

Definition: (Fourier-Transformierte)

Falls das Integral

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert, so ist die Funktion g die **Fourier-Transformierte** von f

Definition: Falls für f das uneigentliche Integral

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \phi(s)$$

existiert, so bezeichnet man ϕ als **Laplace-Transformation** von f .

- Lösung (partieller) Differentialgleichungen

Anwendung: Potentialgleichung

Wiederholung: Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$ ist $F(s)$.
Laplace-Transformierte einer Ableitung $f'(t)$ ist $sF(s) - f(0)$.
Laplace-Transformierte einer zweiten Ableitung $f''(t)$ ist $s^2F(s) - sf'(0) - f(0)$.
Laplace-Transformierte einer dritten Ableitung $f'''(t)$ ist $s^3F(s) - s^2f'(0) - sf''(0) - f''(0)$.
Laplace-Transformierte einer vierten Ableitung $f^{(4)}(t)$ ist $s^4F(s) - s^3f'(0) - s^2f''(0) - sf'''(0) - f'''(0)$.

Theorem von Shannon

Bandbreite B und Abtastfrequenz f_s sind durch die Nyquist-Frequenz $f_N = \frac{f_s}{2}$ verbunden.
Die Nyquist-Frequenz f_N ist die höchste Frequenz, die ohne Aliasing übertragen werden kann.
Die Nyquist-Frequenz f_N ist die Hälfte der Abtastfrequenz f_s .

Anwendung: Lösung von gew. DGL

Wiederholung: Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$ ist $F(s)$.
Laplace-Transformierte einer Ableitung $f'(t)$ ist $sF(s) - f(0)$.
Laplace-Transformierte einer zweiten Ableitung $f''(t)$ ist $s^2F(s) - sf'(0) - f(0)$.
Laplace-Transformierte einer dritten Ableitung $f'''(t)$ ist $s^3F(s) - s^2f'(0) - sf''(0) - f''(0)$.
Laplace-Transformierte einer vierten Ableitung $f^{(4)}(t)$ ist $s^4F(s) - s^3f'(0) - s^2f''(0) - sf'''(0) - f'''(0)$.

Wiederholung

Wiederholung:
Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$ ist $F(s)$.
Laplace-Transformierte einer Ableitung $f'(t)$ ist $sF(s) - f(0)$.
Laplace-Transformierte einer zweiten Ableitung $f''(t)$ ist $s^2F(s) - sf'(0) - f(0)$.
Laplace-Transformierte einer dritten Ableitung $f'''(t)$ ist $s^3F(s) - s^2f'(0) - sf''(0) - f''(0)$.
Laplace-Transformierte einer vierten Ableitung $f^{(4)}(t)$ ist $s^4F(s) - s^3f'(0) - s^2f''(0) - sf'''(0) - f'''(0)$.

Laplace- Transformation

Wiederholung: Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$ ist $F(s)$.
Laplace-Transformierte einer Ableitung $f'(t)$ ist $sF(s) - f(0)$.
Laplace-Transformierte einer zweiten Ableitung $f''(t)$ ist $s^2F(s) - sf'(0) - f(0)$.
Laplace-Transformierte einer dritten Ableitung $f'''(t)$ ist $s^3F(s) - s^2f'(0) - sf''(0) - f''(0)$.
Laplace-Transformierte einer vierten Ableitung $f^{(4)}(t)$ ist $s^4F(s) - s^3f'(0) - s^2f''(0) - sf'''(0) - f'''(0)$.

Erinnerung

Wiederholung: Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$ ist $F(s)$.
Laplace-Transformierte einer Ableitung $f'(t)$ ist $sF(s) - f(0)$.
Laplace-Transformierte einer zweiten Ableitung $f''(t)$ ist $s^2F(s) - sf'(0) - f(0)$.
Laplace-Transformierte einer dritten Ableitung $f'''(t)$ ist $s^3F(s) - s^2f'(0) - sf''(0) - f''(0)$.
Laplace-Transformierte einer vierten Ableitung $f^{(4)}(t)$ ist $s^4F(s) - s^3f'(0) - s^2f''(0) - sf'''(0) - f'''(0)$.

Zusammenfassung

