Komplexe Funktionen

Freitag 13.04.2018

Vorlesung 1

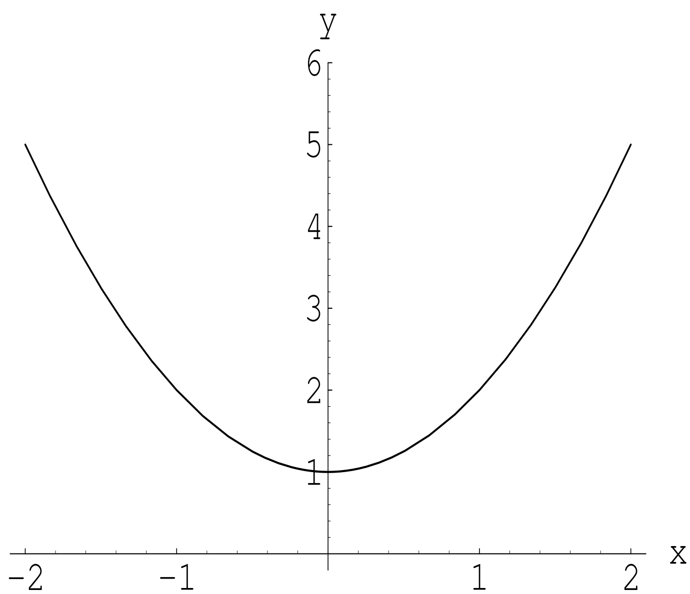
Kai Rothe

Sommersemester 2018

Technische Universität
Hamburg-Harburg

Nullstellen quadratischer Gleichungen

Beispiel 1



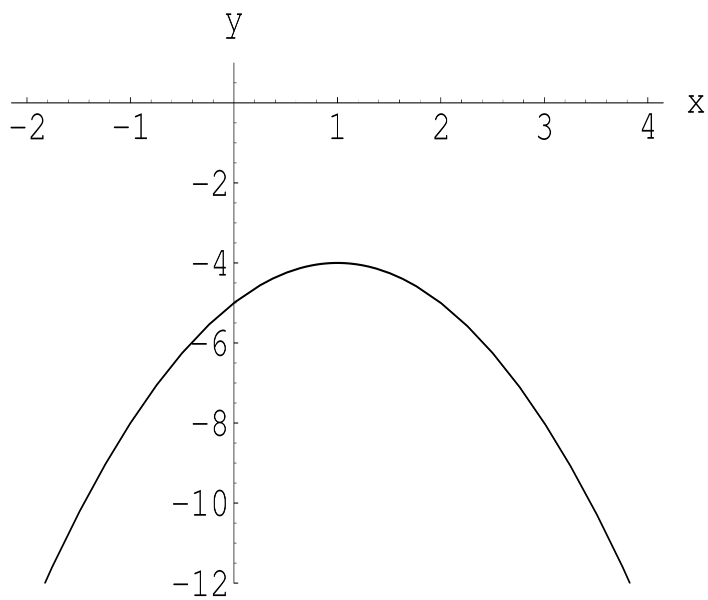
$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{(keine reellen Nullstellen)}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \qquad x^2 &= -1 \\ \Rightarrow \qquad x &= \pm\sqrt{-1} \\ \Rightarrow \qquad x_1 &= -\sqrt{-1}\,, \quad x_2 = \sqrt{-1} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Der durch formales Wurzelziehen erzeugte symbolische Ausdruch $\sqrt{-1}$ ist im Reellen nicht erklärt.
2. Mit der symbolischen Schreibweise $\sqrt{-1}$ darf zunächst nur im Sinne von $(\sqrt{-1})^2 = -1$ gerechnet werden.

Beispiel 2



$$f(x) = -x^2 + 2x - 5 \quad \text{(keine reellen Nullstellen)}$$

$$\begin{aligned}
& -x^2 + 2x - 5 &=& \ 0 \\
\Rightarrow & \quad x^2 - 2x + 5 &=& \ 0 \\
\Rightarrow & \quad x^2 - 2x + 1 + 4 &=& \ 0 \\
\Rightarrow & \quad (x-1)^2 &=& \ -4 \\
\Rightarrow & \quad x - 1 = \pm\sqrt{-4} &=& \ \pm\sqrt{4 \cdot (-1)} = \pm\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} \\
\Rightarrow & \quad x &=& \ 1 \pm 2\sqrt{(-1)} \\
\Rightarrow & \quad x_1 &=& \ 1 + 2\sqrt{-1}\,, \quad x_2 = 1 - 2\sqrt{-1}
\end{aligned}$$

Hier wurde für die symbolische Schreibweise $\sqrt{-1}$ als weitere Rechenoperation $\sqrt{-a} := \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$ definiert. Diese Operation ist aber nur für $a > 0$ zulässig!

Definition

Die beim Lösen der Gleichung $x^2 = -1$ auftretende Größe $\sqrt{-1}$ wird als **imaginäre Einheit**

$$i := \sqrt{-1}$$

bezeichnet. Die Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$ lauten damit $x = \pm i$. In dieser Definition ist $\sqrt{-1}$ als symbolischer Ausdruck und nur bedingt als Rechenausdruck der Wurzelfunktion zu verstehen:

1. Richtig: für $a > 0$ gilt $\quad \sqrt{-a} = \sqrt{(-1)a} = i\sqrt{a}$.
2. Achtung:
   $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = -1.$

Daher wird in der Regel die **imaginäre Einheit** i festgelegt durch:

$$i^2 := -1\ .$$

Mit dieser Festlegung lauten die Lösungen der Beispiele:

1. $\quad x^2 + 1 = 0\ , \qquad\qquad x_{1,2} = \pm i\ ,$
2. $\quad -x^2 + 2x - 5 = 0\ , \quad x_{1,2} = 1 \pm 2i\ ,$

Definition

Für $x, y \in \mathbb{R}$ heißt eine Zahl z mit der Darstellung

$$z = x + iy$$

komplexe Zahl.

$x =: \mathrm{Re}\,(z)$ heißt **Realteil** und
$y =: \mathrm{Im}\,(z)$ **Imaginärteil** von z.

Die Menge der komplexen Zahlen wird bezeichnet mit

$$\mathbb{C} \ := \ \{ \, z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \, \} \, .$$

Beispiele

$$\begin{array}{lll} z = 1 + 4i \, , & \mathrm{Re}\,(z) = 1 \, , & \mathrm{Im}\,(z) = 4 \, , \\ z = 3 - 2.35i \, , & \mathrm{Re}\,(z) = 3 \, , & \mathrm{Im}\,(z) = -2.35 \, , \\ z = 67.3i \, , & \mathrm{Re}\,(z) = 0 \, , & \mathrm{Im}\,(z) = 67.3 \, , \\ z = 42 \, , & \mathrm{Re}\,(z) = 42 \, , & \mathrm{Im}\,(z) = 0 \, . \end{array}$$

Bemerkung:

Für $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ ist $z = x \in \mathbb{R}$, also gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

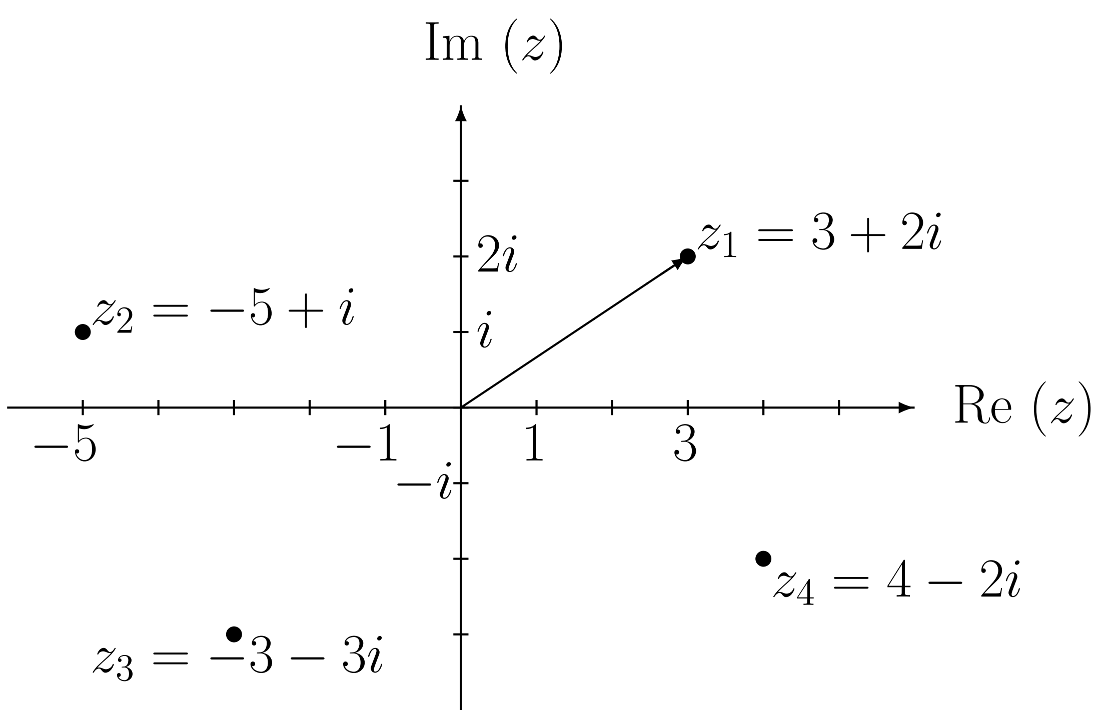
Kartesische Darstellung komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen lassen sich als Punkte in der **komplexen Ebene** darstellen.

Dazu wird in der **kartesischen Darstellung**

$$z = x + iy$$

der Realteil auf der x-Achse und der Imaginärteil auf der y-Achse, wie bei Vektoren (x, y) im $\mathbb{R}^2$, eingetragen.



komplexe Ebene

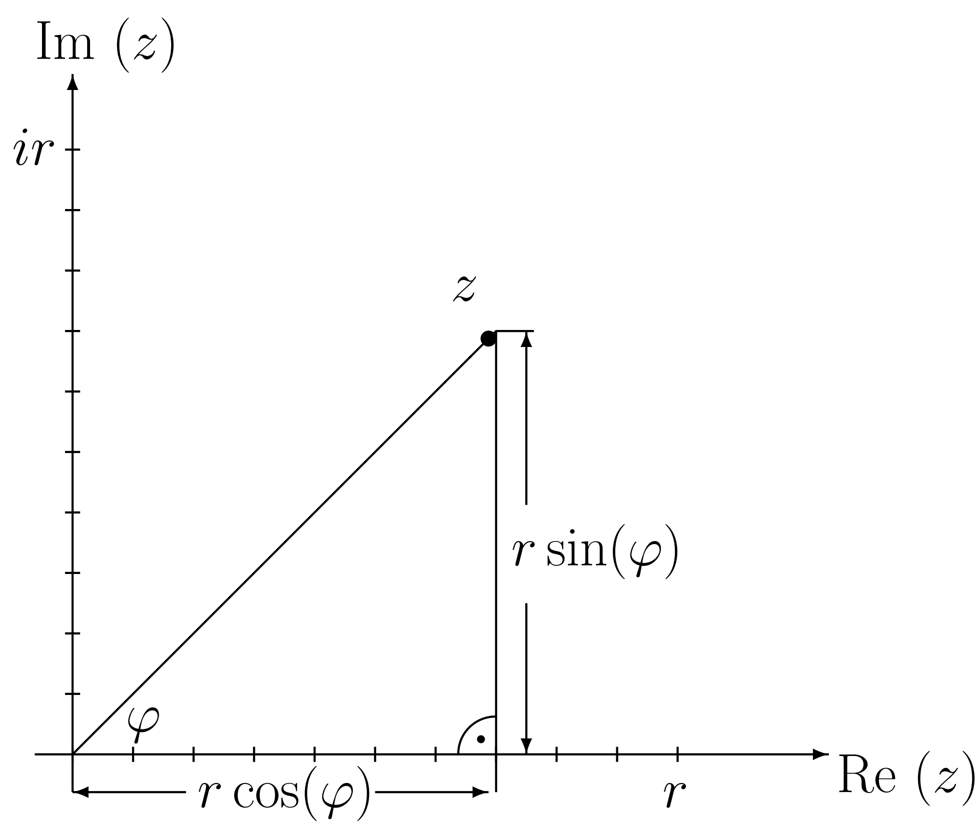
Polarkoordinaten Darstellung

In der **komplexen Ebene** werden die komplexen Zahlen wieder als Punkte eingetragen.

Jeder Punkt $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ wird in der **Polarkoordinaten Darstellung** identifiziert durch seinen Abstand $r > 0$ zum Nullpunkt und einen Winkel $0 \leq \varphi < 2\pi$:

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = re^{i\varphi}\ .$$

Dabei wird definiert $\quad e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi.$



Polarkoordinaten von z: Radius r, Argument $\arg(z) := \varphi$

Umwandlung komplexer Zahldarstellungen

1. Polarkoordinaten $\longrightarrow$ kartesische Koordinaten

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \Rightarrow$$

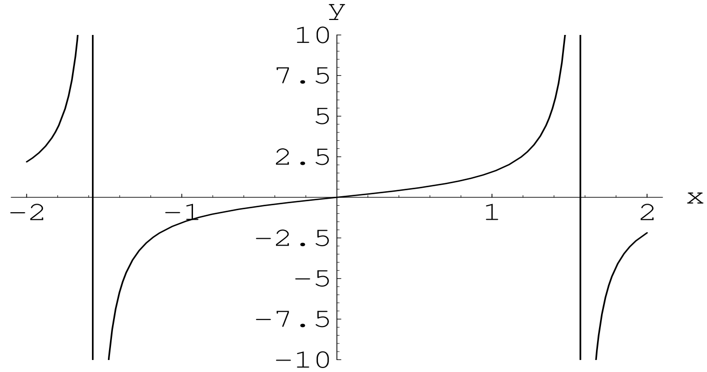
$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi.$$

2. kartesische Koordinaten $\longrightarrow$ Polarkoordinaten

$$x^2+y^2 = (r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2 = r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = r^2$$

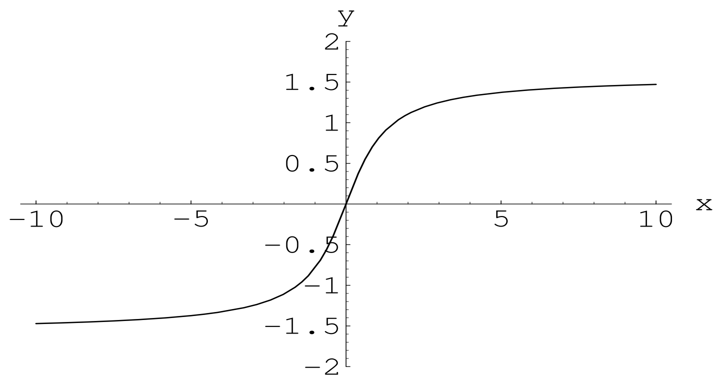
$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi$$



$$f(\varphi) = \tan\varphi$$

Der tan besitzt im Intervall $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ die Umkehrfunktion arctan.



Der Wertebereich von arctan ist also $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Für die Polardarstellung ist der Winkel $0 \le \varphi < 2\pi$ gesucht.

Im 1.Quadranten $0 < x$, $0 \le y$ gilt

$$0 \le \frac{y}{x} = \tan\varphi \quad \Rightarrow \quad 0 \le \varphi = \arctan\varphi < \frac{\pi}{2}$$

und der Winkel für die Polardarstellung ist richtig bestimmt.

$$\frac{y}{x} = \tan\varphi \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi = \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$$

Daraus ergibt sich für alle Quadranten die gültige Umrechnung:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & ,\ x > 0 \ \ ,\ y \geq 0 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & ,\ x = 0,\ ,\ y > 0 \\[2ex] \pi + \arctan\dfrac{y}{x} & ,\ x < 0 \\[2ex] \dfrac{3\pi}{2} & ,\ x = 0,\ ,\ y < 0 \\[2ex] 2\pi + \arctan\dfrac{y}{x} & ,\ x > 0 \ \ ,\ y < 0\,. \end{cases}$$

Bemerkung:
Gelegentlich wird für den Winkel anstelle von $0 \leq \varphi < 2\pi$ auch $-\pi < \varphi \leq \pi$ verlangt. Dann liefert $\arctan\dfrac{y}{x}$ im 1. und 4. Quadranten das richtige Ergebnis, für den 2. Quadranten muss π addiert und den 3. Quadranten π subtrahiert werden.

Beispiele

1. $z = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 1$

2. $z = 1 \cdot e^{i \cdot \pi/4} = 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $z = 2 \cdot e^{i \cdot 5\pi/3} = 2 \cdot (\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}$$

4. $z = -2 \quad \Rightarrow \quad x = -2\,,\; y = 0 \quad \Rightarrow$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2\,, \qquad \varphi = \pi + \arctan \frac{0}{-2} = \pi$$

$$\Rightarrow \quad z = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$$

5. $z = 1 - i \quad \Rightarrow \quad x = 1\,,\; y = -1 \quad \Rightarrow$

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}\,,$$

$$\varphi = 2\pi + \arctan \frac{-1}{1} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad z = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 7\pi/4}$$

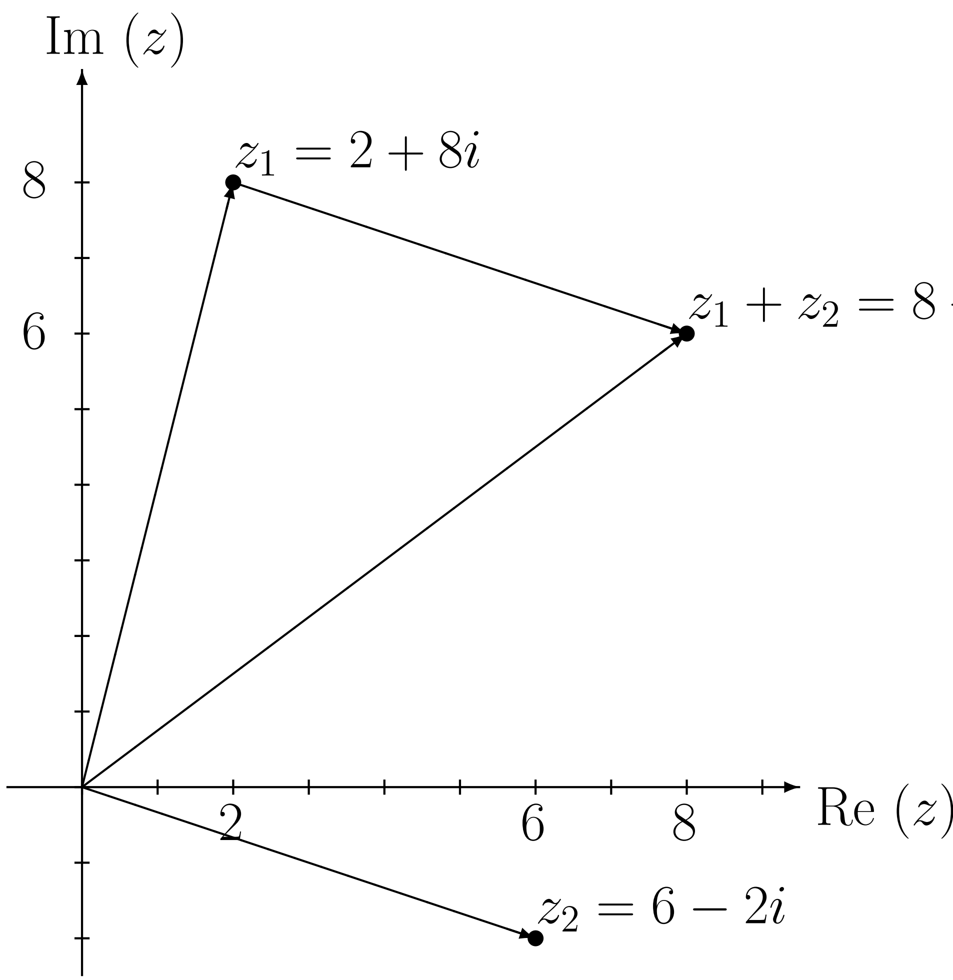
Addition komplexer Zahlen

Für zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = x_1 + iy_1\,, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

wird die **Addition** festgelegt über die kartesische Darstellung:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)\,.$$



Beispiel: $(2+8i)+(6-2i) = 2+6+i(8-2) = 8+6i$

Multiplikation komplexer Zahlen

Für zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = x_1 + iy_1 \, , \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

wird die **Multiplikation** festgelegt über die kartesische Darstellung:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &:= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) \, . \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme für sin und cos

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$
$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1$$

erhält man

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} &= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \\ &\quad + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1) \\ &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ &= e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \,. \end{aligned}$$

Die Multiplikation in Polarkoordinaten ergibt daher

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \,,\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \ \Rightarrow\ z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Interpretation:

Die Multiplikation von z_1 mit z_2 kann also als Drehstreckung von z_1 um den Faktor r_2 und den Winkel φ_2 aufgefasst werden.

Beispiele

1. $4(7-6i) = 4 \cdot 7 - 4 \cdot 6i = 28 - 24i$

2. $(3-i)(-2+5i) = 3(-2)+3\cdot 5i+2i-5i^2 = -1+17i$

3.
$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i\cdot\pi/4}\,,$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{i\cdot 7\pi/4}$$

Multiplikation in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1-i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

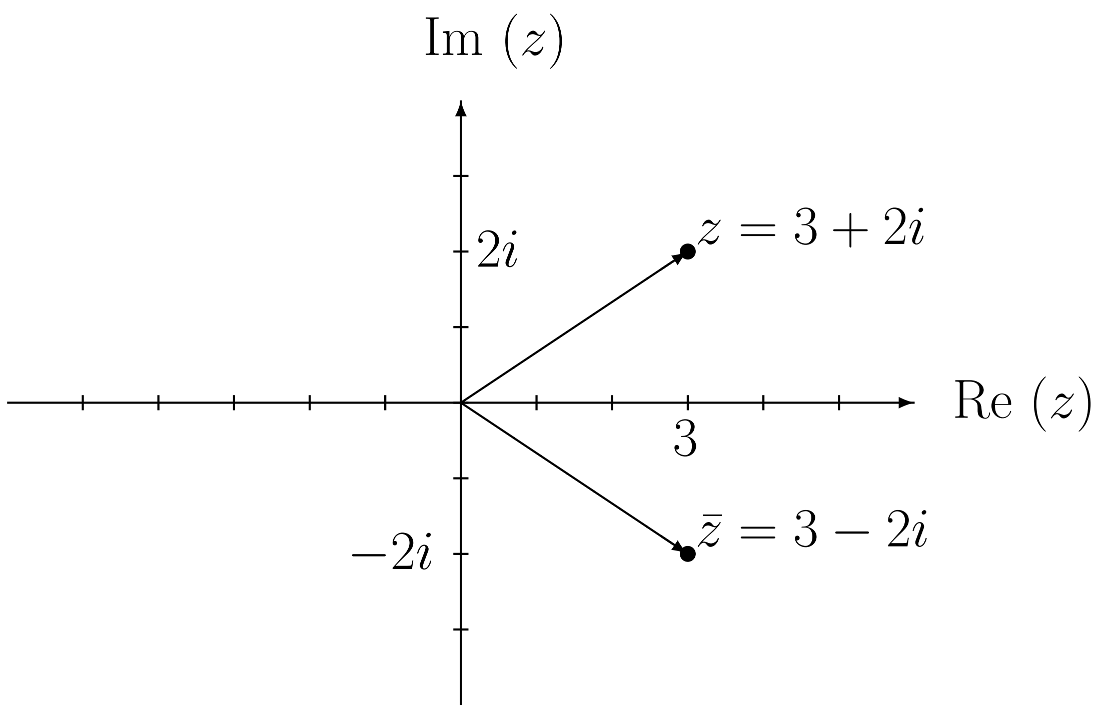
Multiplikation in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= e^{i\cdot\pi/4}\sqrt{2} \cdot e^{i\cdot 7\pi/4} = \sqrt{2} \cdot e^{i(\pi/4+7\pi/4)} \\ &= \sqrt{2}e^{i2\pi} = \sqrt{2}(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Konjugation

Die **konjugiert komplexe Zahl** zu $z = x + iy$ wird festgelegt durch

$$\bar{z} := x - iy \, .$$



Beispiel: $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$

Interpretation:

Die konjugiert komplexe Zahl entsteht durch Spiegelung an der reellen Achse.

Beispiele

1. $$\overline{1-i} = 1+i$$

2. $$\overline{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. $$\overline{re^{i\varphi}} = \overline{r\cos\varphi + ir\sin\varphi}$$
$$= r\cos\varphi - ir\sin\varphi$$
$$= r\cos(-\varphi) + ir\sin(-\varphi) = re^{-i\varphi}$$

4. $$\overline{1-i} = \overline{\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 7\pi/4}}$$
$$= \sqrt{2}\cdot e^{-i\cdot 7\pi/4} = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot \pi/4} = 1+i$$

5. $$\overline{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} = \overline{e^{i\cdot\pi/4}} = e^{-i\cdot\pi/4}$$
$$= e^{i\cdot 7\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \,, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \,,$
3. $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z}) \,, \quad \mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z}) \,,$
4. $z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = \bar{z}$

Wir rechnen dies für $z = x + iy$ nach:

1. $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x - (-iy) = x + iy = z$

2. $$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} \\ &= \overline{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)} \\ &= x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) \\ &= x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)} \\
&= \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)} \\
&= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2) \\
&= x_1x_2 - (-y_1)(-y_2) + i(x_1(-y_2) + (-y_1)x_2) \\
&= (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) \\
&= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \,,
\end{aligned}$$

3. $$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(x + iy + (x - iy)) = x = \text{Re }(z) \,,$$

$$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}(x + iy - (x - iy)) = y = \text{Im }(z)$$

4. $$z \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; z = x + i \cdot 0 = x - i \cdot 0 = \bar{z}$$

und

$$z = x + iy = x - iy = \bar{z}$$
$$\Rightarrow\; 2iy = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; z = x \in \mathbb{R}$$

Hier wurde das folgende Beweisprinzip verwendet:

$$A \;\Rightarrow\; B \;\wedge\; B \;\Rightarrow A$$

besitzt den gleichen Wahrheitswert wie $A \;\Leftrightarrow\; B$

Mit $\quad A: \; z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = \bar{z} \;: B$

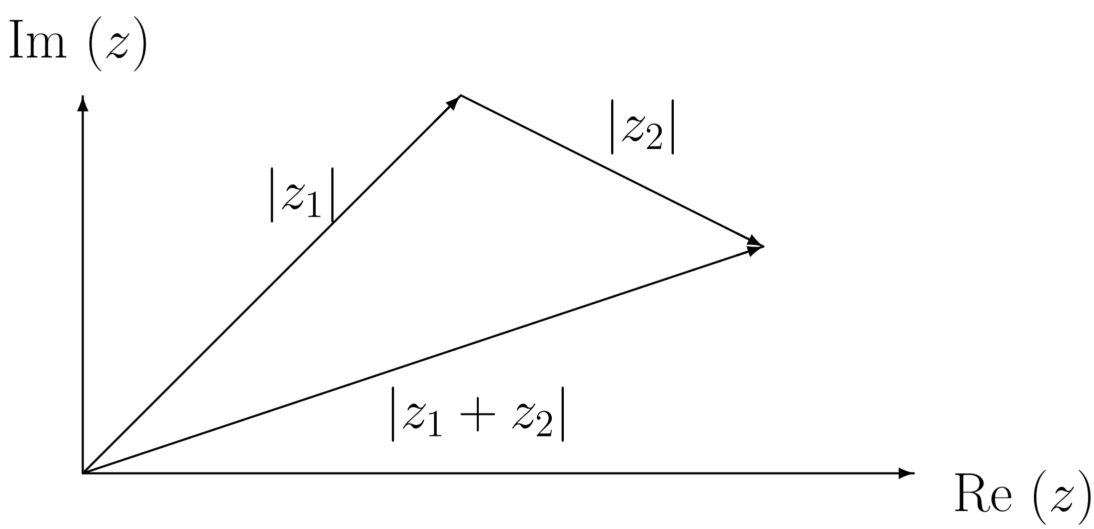
Betrag

Der **Betrag** einer komplexen Zahl ist der Abstand von z zum Nullpunkt, in der Polardarstellung also r:

$$|z| := r = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

1. $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}\,,$
2. $|z| \geq 0\,,$
3. $|z| = 0 \;\Rightarrow\; z = 0\,,$
4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\,,$
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,.$



Dreiecksungleichung für $z_1,\ z_2$

Wir rechnen dies für $z = x + iy$ nach:

1. $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy)$
$= x^2 - i^2y^2 - ixy + ixy = x^2 + y^2$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}\,,$

2. $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0\,,$

3. $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = y = 0 \;\Rightarrow\; z = 0\,,$

4.
$$\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2| &= |(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)| \\
&= |(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)| \\
&= \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2 + (x_1y_2+y_1x_2)^2} \\
&= \sqrt{x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2x_2^2} \\
&= \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2} \\
&= \sqrt{x_1^2(x_2^2+y_2^2) + y_1^2(x_2^2+y_2^2)} \\
&= \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \\
&= \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} \\
&= |z_1| \cdot |z_2|
\end{aligned}$$

5. Sei als Übung empfohlen.

Beispiele

1. $z=-2 \quad \Rightarrow \quad x=-2\,,\; y=0 \quad \Rightarrow$

   $|-2| = \sqrt{(-2)^2+0^2} = 2\,,$

2. $z=i \quad \Rightarrow \quad x=0\,,\; y=1 \quad \Rightarrow$

   $|i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1\,,$

3. $z=1-i \quad \Rightarrow \quad x=1\,,\; y=-1 \quad \Rightarrow$

   $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}\,,$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\; y=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow$

   $$\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

5. $|e^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$

6. $|z| = |re^{i\varphi}| = |r||e^{i\varphi}| = r$

7. $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| = |r_1 e^{i\varphi_1}|\cdot|r_2 e^{i\varphi_2}| = r_1 r_2$

Division komplexer Zahlen

Der **Kehrwert** einer komplexen Zahl $z = x + iy$ wird festgelegt durch:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \,.$$

Damit wird die **Division** erklärt durch

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \,.$$

In Polarkoordinaten

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = re^{i\varphi}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{re^{i\varphi}} &= \frac{r\cos\varphi}{r^2} - i\frac{r\sin\varphi}{r^2} \\ &= \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = \frac{1}{r}e^{-i\varphi} \,. \end{aligned}$$

und

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \,.$$

Beispiele

1. $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}}\right| = \left|\frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

2. $$\frac{1}{i} = \frac{-i}{1} = -i \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{i}\right| = \frac{|1|}{|i|} = 1$$

3. $$\frac{3i}{1-i} = \frac{3i(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{-3+3i}{2}$$

4. $$\frac{4+5i}{i} = \frac{-i(4+5i)}{1^2} = 5-4i$$

5. $$\frac{1}{4-2i} = \frac{4+2i}{4^2+2^2} = \frac{2+i}{10}$$

$$\left|\frac{1}{4-2i}\right| = \frac{1}{|4-2i|} = \frac{1}{\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$\left|\frac{2+i}{10}\right| = \frac{|2+i|}{10} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{5}{10\sqrt{5}}$$

6. $$\frac{1-2i}{3+i} = \frac{(1-2i)(3-i)}{3^2+1^2} = \frac{1-7i}{10}$$

Satz

Gegeben sein Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit reellen Koeffizienten, d.h. $a_k \in \mathbb{R}$:

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \,.$$

Ist z_0 Nullstelle von p, dann ist auch $\bar{z}_0$ Nullstelle von p, d.h. es gilt $p(z_0) = 0 = p(\bar{z}_0)$.

Beweis

Mit $\quad \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}\,,$

$(\bar{z})^k = \bar{z} \cdot \bar{z} \cdot \cdots \cdot \bar{z} = \overline{z \cdot z \cdots z} = \overline{z^k}$

und $a_k = \bar{a}_k$ (wegen $a_k \in \mathbb{R}$) gilt:

$$\begin{aligned}
p(\bar{z}_0) &= a_n(\bar{z}_0)^n + a_{n-1}(\bar{z}_0)^{n-1} + \cdots + a_2(\bar{z}_0)^2 + a_1\bar{z}_0 + a_0 \\
&= a_n\overline{z_0^n} + a_{n-1}\overline{z_0^{n-1}} + \cdots + a_2\overline{z_0^2} + a_1\bar{z}_0 + a_0 \\
&= \bar{a}_n\overline{z_0^n} + \bar{a}_{n-1}\overline{z_0^{n-1}} + \cdots + \bar{a}_2\overline{z_0^2} + \bar{a}_1\bar{z}_0 + \bar{a}_0 \\
&= \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \cdots + \overline{a_2 z_0^2} + \overline{a_1 z_0} + \bar{a}_0 \\
&= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_2 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0} \\
&= \overline{p(z_0)} = \bar{0} = 0 \,.
\end{aligned}$$

Beispiele

1. $z^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 1 = \bar{z}_1 \,,\; z_2 = -1 = \bar{z}_2 \,,$

2. $z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = i \,, \quad z_2 = \bar{z}_1 = -i \,,$

3. $-z^2 + 2z - 5 = 0 \quad \Rightarrow$
   $z_1 = 1 + 2i \,, \quad z_2 = \bar{z}_1 = 1 - 2i \,,$

4. $z^2 + pz + q = 0$
   mit $p, q \in \mathbb{R}$ und $\dfrac{p^2}{4} - q < 0 \quad \Rightarrow$

$$z_1 = -\frac{p}{2} + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right) i \,,$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = -\frac{p}{2} - \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right) i \,,$$

5. $iz + 5 - 2i = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2 + 5i$
   (besitzt keine reellen Koeffizienten)

Die Einheitswurzeln

Die Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1$$

werden als n-te **Einheitswurzeln** bezeichnet.

Satz

Es gibt genau n verschiedene Einheitswurzeln z_0 , z_1 , . . . , z_{n-1}. Sie besitzen die Darstellung

$$z_k = e^{i2\pi k/n} \ , \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \ .$$

Interpretation

- Die Einheitswurzel liegen alle auf dem Einheitskreis.

- Der Winkelunterschied von einer zur nächsten Einheitswurzel ist konstant $2\pi/n$.

- Der Einheitskreis wird durch die Einheitswurzeln in n gleiche Abschnitte zerlegt.

- $z^n = 1$ kann als Kreisteilungsgleichung aufgefasst werden.

Beweis

Die Lösungen von $z^n = 1$ werden in Polarkoordinaten, also $z = re^{i\varphi}$ gesucht. Dabei gilt $r \in \mathbb{R}$ und $r > 0$.

$$1 = |1| = |z^n| = |z|^n = |re^{i\varphi}|^n = |r|^n$$

$$\Rightarrow \quad r = 1 \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow 1 = z^n = e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi} \cdots e^{i\varphi} = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \cos(n\varphi) \quad \wedge \quad \sin(n\varphi) = 0$$

$$1 = \cos(n\varphi) \quad \Rightarrow \quad n\varphi = 2\pi k \quad \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi k}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(n\varphi) = \sin(2\pi k) = 0$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ liefern verschiedene Werte

$$0 \leq \frac{2\pi k}{n} < 2\pi \ .$$

Für alle anderen $k \in \mathbb{Z}$ wiederholen sich diese Winkel.

$$\Rightarrow \quad z = e^{i2\pi k/n}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Beispiele

1. $z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (z-1)(z+1)$

$$z_0 = e^{i2\pi 0/2} = e^0 = 1\,, \quad z_1 = e^{i2\pi 1/2} = e^{\pi i} = -1$$

2. $z^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$

$$z_0 = e^{i2\pi 0/3} = 1\,, \quad z_1 = e^{i2\pi 1/3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$z_2 = e^{i2\pi 2/3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

3. $z^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1)$

$$z_0 = e^{i2\pi 0/4} = 1\,, \qquad z_1 = e^{i2\pi 1/4} = i\,,$$

$$z_2 = e^{i2\pi 2/4} = -1\,, \quad z_3 = e^{i2\pi 3/4} = -i$$