Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Sei γ der mathematisch positiv orientierte Rand (d.h. die Randkurve wird so durchlaufen, dass das Gebiet links liegt) des Gebietes $R := \{z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < |z| < 3\}$.

Berechnen Sie : i) $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Im}(z)dz$, ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{z+4i}dz$, und iii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{6z-6}{2z^2-5z+2}dz$,

b) Bitte bewerten Sie folgende Aussagen (wahr oder falsch).

(i) Seien $C(t) = 4e^{-it}$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$ und $\tilde{C}$ der einmal positiv durchlaufene Kreis mit Radius 2 um Null. . Dann gilt

☐ $\displaystyle\int_C \frac{3}{z-1}\,dz = 6\pi i$.

☐ $\displaystyle\int_C (z-1)^2 + \frac{3}{z-1}\,dz = -12\pi i$.

☐ $\displaystyle\int_C \frac{3}{z-1}\,dz = -2\int_{\tilde{C}} \frac{3}{z-1}\,dz$.

(ii) Sei $f(z) = \log(z)$. Dann gilt

☐ $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = -2i$ für $C_1(t) = e^{it}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

☐ $\displaystyle\int_{C_2} f(z)\,dz = -2i$ für $C_2(t) = 4 - 4t^2 + it$, $t \in [-1, 1]$.

Aufgabe 2:

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(z) := \frac{e^z - 1}{e^z + e^{-z}}\,, \qquad f_2(z) := \frac{1}{\log(3-z)}\,, \qquad f_3(z) := \frac{1}{\log(\frac{i}{2} - 4 - z)}.$$

Bestimmen Sie für $k = 1, 2, 3$ (ohne die jeweilige Reihe zu berechnen) den Radius des größten Kreises um Null, in dem die jeweilige Taylor Reihen T_k von f_k mit Entwicklungspunkt Null gegen f_k konvergiert.

b) Sei C eine einfach geschlossene stückweise C^1 Kurve. Wann ist das Integral

$$I(C) := \int_C \frac{z}{z^2+1}\,dz$$

definiert?

Welche Werte kann das Integral annehmen, wenn es definiert ist?

c) Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2 - 4z + 13)}$ soll in eine Taylor Reihe mit Entwicklungspunkt $z_0 := x_0 + iy_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^+$, $y_0 \in \mathbb{R}$ entwickelt werden, die mindestens in der Kreisscheibe $|z - z_0| < |z_0|$ gegen $f(z)$ konvergiert. Wie muss der Entwicklungspunkt gewählt werden, damit x_0 möglichst groß wird.

Abgabe bis: 28.06.19