Fachbereich Mathematik **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis

Klausur Komplexe Funktionen

29. August 2019

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

AIW	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	TM	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1) [5+ 6 Punkte]

a) Es sei i die imaginäre Einheit, $\log(z)$ der Hauptzweig der Logarithmus Funktion und $e = \exp(1)$.
Gegeben sei die Menge $R = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{e} < |z| < 1, -\frac{\pi}{4} < \arg(z) < 0\}$,
sowie die Abbildung

$$f(z) = \log\left(\frac{1}{z}\right) + 1 + i \cdot \frac{\pi}{4}.$$

(i) Skizzieren Sie die Menge R in der komplexen Ebene.

(ii) In welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ ist f komplex differenzierbar?

(iii) Bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung f.

b) (i) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit

$$T(-3) = 0, \qquad T(0) = -1, \qquad T(3) = \infty.$$

(ii) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation T aus Teil b)(i).
$K :=$ reelle Achse,
$K_3 := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 3 \}$,
$\tilde{K} :=$ imaginäre Achse.

Lösungsskizze zur Aufgabe 1)

a) **[5 Punkte]**

(i) Skizze: R ist ein Achtelring mit Innenradius $1/e$ und Außenradius 1 begrenzt durch die positive reelle Achse und dem Strahl $\varphi = -\pi/4$. **[1 Punkt]**

(ii) f entsteht durch Division und Addition elementarer Funktionen (Identität und Exponentialfunktion) und ist damit überall komplex differenzierbar, wo der entstandene Ausdruck definiert ist, also für alle
$z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$. **[1 Punkt]**

(iii) Sei $\tilde{w} = \frac{1}{z}$ dann gilt $1 \le |\tilde{w}| \le e^1$ und $0 \le \arg(\tilde{w}) \le \frac{\pi}{4}$. **[1 Punkt]**
Für $\hat{w} = \log(\tilde{w}) = \log|\tilde{w}| + i \arg(\tilde{w})$ gilt dann
$\mathrm{Re}(\hat{w}) \in [\ln(1), \ln(e)] = [0,1]$, $\quad \mathrm{Im}(\hat{w}) \in [0, \frac{\pi}{4}]$. **[1 Punkt]**
Schließlich berechnen wir
$f(z) = \hat{w} + 1 + \frac{\pi}{4}$ und erhalten ein achsenparalleles Rechteck mit
$\mathrm{Re}(f(z)) \in]1,2[$, $\quad \mathrm{Im}(f(z)) \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. **[1 Punkt]**

b) **[6 Punkte]**

(i) **[1 Punkt]** $T(-3) = 0\,, T(3) = \infty \iff T(z) = \dfrac{a(z+3)}{z-3}.$

$T(0) = -1\,, \implies T(z) = \dfrac{z+3}{z-3}.$

(ii) $K = \mathbb{R}$ **[1 Punkte]**

Wegen der reellen Koeffizienten bzw. wegen der gegebenen Bilder von -3, 0, 3 ist $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Alternative Lösung: $3 \in \mathbb{R} \iff T(\mathbb{R})$ ist eine Gerade.

$T(0) = -1$, $T(-3) = 0 \iff T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$K_3 := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 3 \,\}$ **[2 Punkte]**

$3 \in K_3 \iff T(K_3)$ ist eine Gerade.

K_3 symmetrisch zu $\mathbb{R} \implies T(K_3)$ symmetrisch zu $\mathbb{R}$.

$T(-3) = 0 \iff T(K_3) = i\mathbb{R}$.

$\tilde{K} :=$ imaginäre Achse. **[2 Punkte]**

$3 \notin i\mathbb{R} \iff T(i\mathbb{R})$ ist ein echter Kreis $K_{i\mathbb{R}}$.

$i\mathbb{R}$ symmetrisch zu $\mathbb{R}$ und $K_3 \implies T(\mathbb{R})$ ist symmetrisch zu $\mathbb{R}$ und $i\mathbb{R}$. Der Mittelpunkt des Bildkreises ist also $M = 0$.

Wegen $T(0) = -1$ ist der Radius $R = 1$.

Aufgabe 2) [9 Punkte]Gegeben sei

$$f(z) = \frac{3}{(z-2)(z^2+9)}\,.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f und geben Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

c) In welcher Kreisscheibe um $z_0 = 0$ konvergiert die Taylor Reihe von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ gegen f?

d) Wie viele verschiedene Laurent Reihen von f gibt es zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$?

e) Berechnen Sie folgende Integrale

(i) $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)\,dz\,, \qquad C_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ C_1(t) = e^{it},$

(ii) $\displaystyle\oint_{C_2} f(z)\,dz\,, \qquad C_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ C_2(t) = 2 + e^{it}.$

Lösung:

a) $(z-2)(z^2+9) = (z-2)(z+3i)(z-3i) = 0 \iff z \in \{2, -3i, 3i\}$.
Es liegen einfache Pole in $z_1 = 2$ und $z_{2,3} = \mp 3i$ vor. **[2 Punkte]**

b) **[3 Punkte]**

$$Res(f;2) = \left.\frac{3}{z^2+9}\right|_{z=2} = \frac{3}{13}.$$

$$Res(f;-3i) = \left.\frac{3}{(z-2)(z-3i)}\right|_{z=-3i} = \frac{3}{(-3i-2)(-6i)} = \frac{3}{-18+12i} = \frac{1}{-6+4i}$$

$$Res(f;3i) = \left.\frac{3}{(z-2)(z+3i)}\right|_{z=3i} = \frac{3}{(3i-2)(6i)} = \frac{3}{-18-12i} = \frac{1}{-6-4i}$$

PBZ: $\displaystyle f(z) = \frac{3}{13(z-2)} + \frac{1}{(-6+4i)(z+3i} + \frac{1}{(-6-4i)(z-3i)}$

c) In der Kreisscheibe $|z| < 2$. **[1 Punkte]**

d) **[1 Punkt]**
Drei, und zwar in den Ringen: $R_1 : |z| < 2, \quad R_2 : 2 < |z| < 3, \quad R_3 : 3 < |z|$.

e) (i) $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)\,dz = 0$ (CIS) **[1 Punkte]**

(ii) $\displaystyle\oint_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i\, Res(f;2) = \frac{6\pi i}{13}\,.$ **[1 Punkt]**

Aufgabe 3) [4 Punkte]

a) Gegeben sind die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 :&\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f_1(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z}\,, \\ f_2 :&\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f_2(z) = z(1-\bar{z})\,. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Funktionen sind in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

i) f_1, ii) f_2, iii) $f_1 + f_2$, iv) keine der Funktionen unter i), ii), iii).

Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Geben Sie zu $u(x, y) = x^2 - y^2$ eine konjugiert harmonische Funktion an.

Lösung:

a) **[3 Punkte]**

$f_1(z) = z \cdot \bar{z}$ ist reellwertig und nicht konstant, daher nicht auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar.

$f_2 = z - z \cdot \bar{z}$ ist nicht auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar sonst wäre $-f_2 - z = f_1$ ebenfalls differenzierbar.

$(f_1 + f_2)(z) = z$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar

b) **[1 Punkt]**
Gesucht ist $v(x, y)$ mit

$v_y = u_x = 2x \implies v(x, y) = 2xy + k(x)$ und

$v_x = -u_y = 2y \implies v(x, y) = 2xy + k(y)$.

Für beliebiges $K \in \mathbb{R}$ ist durch $v(x, y) = 2xy + K,$ eine zu u konjugiert harmonische Funktion gegeben.