Fachbereich Mathematik **WiSe 2019/2020**
Prof. Dr. T. Reis

Klausur Komplexe Funktionen

02. März 2020

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

AIW	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	TM	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1) [3+ 3 + 3 +1 Punkte] Es sei i die imaginäre Einheit.

a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$e^{3z} - \frac{i}{e^z} = 0\,.$$

b) Für welche $k,\, l \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$

$$f(z) = (\mathrm{Re}\,(z))^3 + i\cdot k\cdot\cdot(\mathrm{Re}\,(z))^2\cdot\mathrm{Im}\,(z) - k\cdot\mathrm{Re}\,(z)\cdot(\mathrm{Im}\,(z))^2 + i\cdot l\cdot\mathrm{Re}\,(z) - i\cdot(\mathrm{Im}\,(z))^3$$

auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

c) Welche der folgenden Mengen M_1, M_2, M_3 kann mittels einer Möbius Transformation auf den Parallestreifen

$$P = \{z \in \mathbb{C} :\ -1 < \mathrm{Re}\,(z) < 1\}$$

abgebildet werden?

$M_1 = \{z \in \mathbb{C} :\ 1 < |z| < 2\}$,
$M_2 = \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}\,(z) > 0,\, \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$,
$M_3 = \{z \in \mathbb{C} :\ |z+1| > 1 \text{ und } |z-1| > 1\}$.

d) Geben Sie eine Abbildung an, die den Parallestreifen

$$P = \{z \in \mathbb{C} :\ -1 < \mathrm{Re}\,(z) < 1\}$$

auf den Parallestreifen

$$\tilde{P} = \{z \in \mathbb{C} :\ -2 < \mathrm{Im}\,(z) < 2\}$$

abbildet.

Lösung:

a)

$$e^{3z} - \frac{i}{e^z} = 0 \iff e^{4z} = i\,.$$

Zu erfüllen sind die beiden Gleichungen

$|e^{4z}| = |e^{4x}\cdot e^{4iy}| = e^{4x} \stackrel{!}{=} |i| = 1$

und

$\arg\,(e^{4z}) = 4y \stackrel{!}{=} \arg\,(i) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$ **[2 Punkte]**

Also $x = 0$ und $y_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$ **[1 Punkt]** b)

$$\begin{aligned} f(z) =&\ u(x,y) + iv(x,y) \\ =&\ (\mathrm{Re}\,(z))^3 + i \cdot k \cdot \cdot (\mathrm{Re}\,(z))^2 \cdot \mathrm{Im}\,(z) -\ k \cdot \mathrm{Re}\,(z) \cdot (\mathrm{Im}\,(z))^2 + i \cdot l \cdot \mathrm{Re}\,(z) -\ i \cdot (\mathrm{Im}\,(z))^3 \end{aligned}$$

Mit $z = x + iy$ gilt

$u(x,y) =\ x^3 - kxy^2$ und $v(x,y) =\ kx^2y + lx - y^3.$ **[1 Punkt]**

Zu erfüllen Sind die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen:

$u_x = 3x^2 - ky^2 \stackrel{!}{=} v_y = kx^2 - 3y^2 \implies k = 3$

und

$-u_y = 2kxy \stackrel{!}{=} v_x = 2kxy\ + l \implies l = 0,\ k$ beliebig.

Die Funktion ist nur für $k = 3$ und $l = 0$ auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.
[2 Punkte]

c) Durch eine Möbius Transformation müssten die begrenzenden verallgemeinerten Kreise der Urbilder auf zwei Geraden in $\mathbb{C}^*$ abgebildet werden, die einen Schnittpunkt in ∞ haben. Das geht nur, wenn die begrenzenden verallgemeinerten Kreise der Urbilder auch genau einen Schnittpunkt haben.

$M_1 = \{z \in \mathbb{C} :\ 1 \leq |z| \leq 2\}$ wird begrenzt durch zwei schnittfreie Kreise.

$M_2 = \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}\,(z) > 0,\ \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ wird begrenzt durch zwei Geraden mit den Schnittpunkten Null und ∞.

$M_3 = \{z \in \mathbb{C} :\ |z+1| > 1 \text{ und } |z-1| > 1\}$ wird begrenzt durch zwei Kreise mit einem Schnittpunkt in Null.

Nur M_3 kann mittels einer Möbius Transformation auf P abgebildet werden.
[3 Punkte]

d)

$$f(z) =\ 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z =\ 2i\,z\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Aufgabe 2)

a) **[3 Punkte]** Für $z = x + iy$ sei $\bar{z} = x - iy$. Berechnen Sie

$$\oint_c \bar{z} \cdot z^{\frac{1}{2}}\, dz, \qquad c : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\; c(t) \;=\; 4e^{it}\,.$$

b) Gegeben ist $\qquad f(z) \;=\; \dfrac{1}{z^2 - 4z + 29}\,.$

(i) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten der Funktion f.

(ii) Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der Funktion f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2 + 5i$, die im Punkt $z^* = 20$ gegen $f(z^*)$ konvergiert.

Lösung:

a) **[3 Punkte]**

$f(c(t)) = 4e^{-it} \cdot (4e^{it})^{\frac{1}{2}} \;= 4e^{-it} \cdot 2e^{\frac{it}{2}} \;=\; 8e^{-\frac{it}{2}}\,,$

$\dot{c}(t) = 4ie^{it}, \qquad f(c(t))\dot{c}(t) = 4ie^{it}8e^{-\frac{it}{2}} \;= 32ie^{\frac{it}{2}}.$

$$\int\limits_c \bar{z}\, z^2\, dz, = \int_0^{2\pi} 32ie^{\frac{it}{2}}\, dt$$

$$= 32i \left[\frac{e^{\frac{it}{2}}}{\frac{i}{2}}\right]_0^{2\pi} \;= 64(e^{i\pi} - e^0) \;=\; -128\,.$$

b) $\qquad g(z) \;=\; \dfrac{1}{z^2 - 4z + 29}\,.$

(i) **[3 Punkte]**

Isolierten Singularitäten von f:

$z^2 - 4z + 29 \;=\; (z-2)^2 + 25 \;=\; 0 \implies z_{1,2} \;=\; 2 \pm \sqrt{-25} \;=\; 2 \pm 5i.$

$$\mathrm{Res}(f; 2+5i) \;=\; \left.\frac{1}{z - (2-5i)}\right|_{z=2+5i} \;=\; \tfrac{1}{10i} \;=\; -\tfrac{i}{10}$$

$$\mathrm{Res}(f; 2-5i) \;=\; \left.\frac{1}{z - (2+5i)}\right|_{z=2-5i} \;=\; \tfrac{1}{-10i} \;=\; \tfrac{i}{10}$$

(ii) **[4 Punkte]**

Es gibt eine Laurent Reihe im Ring

$R_1 :\; 0 \;<\; |z - (2+5i)| \;<\; |(2-5i) - (2+5i)| \;=\; 10$

und eine Laurent Reihe im Ring

$R_2 :\; |(2-5i) - (2+5i)| \;=\; 10 \;<\; |z - z_0| \;=\; |z - (2+5i)|\,.$

Der Punkt $z^* = 20$ liegt im Ring R_2. [**1 Punkt**]

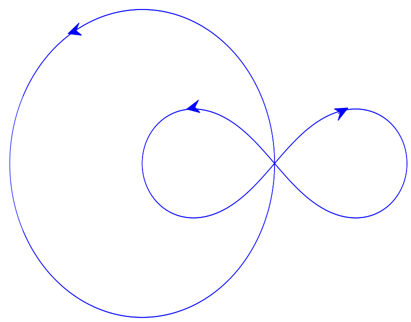
$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-(2-5i)} &= \frac{1}{(z-(2+5i))+10i} = \frac{1}{z-(2+5i)} \cdot \frac{1}{1-\frac{-10i}{z-(2+5i)}} \\
&= \frac{1}{z-(2+5i)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-10i}{z-(2+5i)}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-10i)^k \, (z-(2+5i))^{-k-1} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} (-10i)^{-k-1} \, (z-(2+5i))^k \, .\textbf{[2 Punkte]}
\end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-(2+5i))(z-(2-5i))} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-10i)^{-k-1} \, (z-(2+5i))^{k-1} \, . \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-2} (-10i)^{-k-2} \, (z-(2+5i))^k \, . \qquad \textbf{[1 Punkt]}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3) [4 Punkte]

a) Die Kurve c der Skizze teilt $\mathbb{C}$ in vier Bereiche auf. Geben Sie die Umlaufzahlen der einzelnen Bereiche an.



b) Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Weiterhin seien c und $\tilde{c}$ zwei Kurven in D mit dem gleichen Anfangspunkt z_1 und dem gleichen Endpunkt z_2. Gilt dann stets

$$\int_c f(z)dz = \int_{\tilde{c}} f(z)dz\,?$$

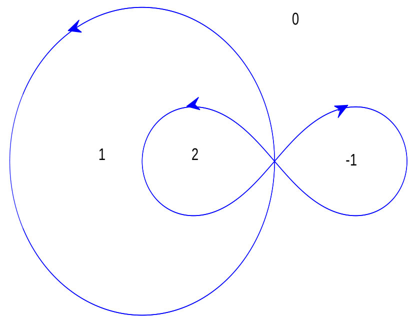
Alternativ zu 3a oder 3b: Ein Streifen parallel zur imaginären Achse soll auf einen Kreisring abgebildet werden. Mit welcher der folgenden Abbildungsarten lässt sich dies realisieren?

i) Möbius Transformation, ii) Exponentialfunktion, iii) Lineare Funktion, iv) durch keine der angegebenen Abbildungsarten.

Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

a) **[2 Punkte]**



b) Die Aussage ist falsch. Wähle ein nicht einfach zusammenhängendes Gebiet und die Kurven so, dass $C_1 - C_2$ eine nicht hebbare Singularität umläuft.

Ein mögliches konkretes Gegenbeispiel: Sie D der Ring um Null mit

$z \in D \Longleftrightarrow 2 < |z| < 4.$

$z_1 = 3, z_2 = -3, \qquad f(z) = \frac{1}{z}, \qquad c(t) = 3e^{it}, \tilde{c}(t) = 3e^{-it},\ t \in [0;\pi].$

Dann ist

$\oint_{c-\tilde{c}} f(z)dz = 2\pi i\, Res f(0) \ = 2\pi i$

also $\displaystyle\int_c f(z)dz \ - \int_{\tilde{c}} f(z)dz \neq 0.$

Alternativ:

$$\int_C f(z)dz \ = \int_0^\pi \frac{1}{3e^{it}} \cdot \dot{C}(t)dt = \int_0^\pi \frac{1}{3}\, e^{-it} \cdot 3ie^{it}dt = \pi i$$

$$\int_{\tilde{C}} f(z)dz \ = \int_0^\pi \frac{1}{3e^{-it}} \cdot \dot{C}(t)dt = \int_0^\pi \frac{1}{3}\, e^{it} \cdot (-3i)e^{-it}dt = -\pi i$$

Alternativ:

i) Möbius Transformation: Nicht möglich. Das Bild von ∞ müsste auf den Bildern beider begrenzenden Kreise des Ringes liegen.

ii) Exponentialfunktion: möglich. Denn $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}\,(z)}$ und $\arg(z) = \mathrm{Im}\,(z)$.

iii) Lineare Funktion: nicht möglich, da eine lineare Funktion eine reine Drehstreckung beschreibt.