

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Timo Reis

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Sommersemester 2019

Allgemeine Informationen

Informationsquellen



<https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/kf/19/lm.html>

- **Vorlesung** (wöchentlich, ab Montag 1.4.2019)
Montag, 11:30-13:00 in K - DE15 Raum 0506
- **Übungen in Tutorgruppen** (14-täglich, ab Montag 8.4.2019,
Anmeldung im Intranet der TU)
Dr. Hanna Peywand Kiani und ÜbungsgruppenleiterInnen
- **Hörsaalübungen** (14-täglich, ab Freitag 5.4.2019)
Freitag, 11:30–13:00 Uhr, H0.016
Dr. Hanna Peywand Kiani.
- **Sprechstunde Prof. Reis**
Montag, E 3.079, 13:30–14:30

G. Bärwolff: **Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure**,

3. Auflage. Springer 2017, Kap. 11

<http://www.springer.com/de/book/9783662550212>



R. Ansorge, H. J. Oberle: **Mathematik für Ingenieure 2**,

3. Auflage. WILEY-VCH, 2011.

K. Burg, H. Haf, F. Wille, A. Meister: **Funktionentheorie - Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker**,

Springer, 2014

<https://www.springer.com/de/book/9783834819529>

W. Fischer, I. Lieb: **Funktionentheorie**,

Springer-Vieweg, 1994

<https://www.springer.com/de/book/9783322943873>

Inhalt der komplexen Funktionen

- 1 Komplexe Zahlen
- 2 Funktionen einer komplexen Variablen
- 3 Möbius-Transformationen
- 4 Komplexe Differentiation und Integration
- 5 Ebene Potentialprobleme
- 6 Konforme Abbildungen
- 7 Cauchysche Integralformel und Anwendungen
- 8 Taylor- und Laurent-Reihenentwicklungen
- 9 Isolierte Singularitäten und Residuen
- 10 Integraltransformationen: Fourier- und Laplace-Transformation
- 11 Shannon-Abtasttheorem

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen \mathbb{C}

Die Zahl i heißt **imaginäre Einheit**. Es gilt

$$i^2 = -1.$$

Wir bilden

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Rechenoperationen (für $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$)

Addition:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Multiplikation:

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Komplexe Zahlen

Prinzipielle Fragen zu den komplexen Zahlen

- Kann man mit diesen Rechenoperationen widerspruchsfrei rechnen?
- Sind die Rechenoperationen konsistent mit den bekannten Rechenregeln in \mathbb{R} ?
- Kann man die komplexen Zahlen anordnen?
- Gibt es alternative Darstellungen für komplexe Zahlen?
- Sind mit Rechenoperationen in \mathbb{C} geometrische Interpretationen verbunden?
- ...
- Warum beschäftigen wir uns eigentlich mit komplexen Zahlen?
- ... und später mit komplexen Funktionen?
- Gibt es hierzu interessante Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften?

Komplexe Zahlen

Inversion

Komplexe Zahlen

Eigenschaften

Assoziativgesetz	$\forall v, w, z \in \mathbb{C} :$	$v + (w + z) = (v + w) + z$
Kommutativgesetz	$\forall w, z \in \mathbb{C} :$	$w + z = z + w$
Existenz der Null	$\forall z \in \mathbb{C} \exists 0 \in \mathbb{C} :$	$z + 0 = z$
Existenz des Inversen	$\forall z \in \mathbb{C} \exists -z \in \mathbb{C} :$	$z + (-z) = 0$
Assoziativgesetz	$\forall v, w, z \in \mathbb{C} :$	$(vw)z = v(wz)$
Kommutativgesetz	$\forall w, z \in \mathbb{C} :$	$wz = zw$
Existenz der Eins	$\forall z \in \mathbb{C} \exists 1 \in \mathbb{C} :$	$z \cdot 1 = z$
Existenz des Inversen	$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists z^{-1} \in \mathbb{C} :$	$zz^{-1} = 1$
Distributivgesetz	$\forall v, w, z \in \mathbb{C} :$	$v(w + z) = vw + vz$

Damit bildet die Menge der komplexen Zahlen einen **Körper**. Die reellen Zahlen bilden einen **Teilkörper** von \mathbb{C} .

Komplexe Zahlen

Realteil, Imaginärteil, Gaußsche Ebene

Komplexe Zahlen

Der Körper der reellen Zahlen ist angeordnet:

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x > 0$ oder $x = 0$ oder $x < 0$;
- Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $x + y > 0$;
- Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $xy > 0$.

Ist der Körper der komplexen Zahlen, \mathbb{C} , angeordnet?

Antwort: NEIN!

Denn in einem angeordneten Körper sind von Null verschiedene Quadratzahlen positiv. Wäre \mathbb{C} angeordnet, so folgt aus

$$0 < 1^2 = 1 \quad \text{und} \quad 0 < i^2 = -1$$

der Widerspruch $0 < 1 + (-1) = 0$. □

Komplexe Zahlen

Konjugation

Ordne durch Spiegelung an reeller Achse jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ mit

$$\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$$

konjugierte komplexe Zahl zu.

Es gelten die folgenden Rechenregeln.

$$\begin{aligned}\overline{w + z} &= \bar{w} + \bar{z} && \text{für } w, z \in \mathbb{C} \\ \overline{wz} &= \bar{w} \cdot \bar{z} && \text{für } w, z \in \mathbb{C} \\ \overline{(\bar{z})} &= z && \text{für } z \in \mathbb{C} \\ z\bar{z} &= x^2 + y^2 && \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C} \\ \operatorname{Re}(z) &= (z + \bar{z})/2 && \text{für } z \in \mathbb{C} \\ \operatorname{Im}(z) &= (z - \bar{z})/(2i) && \text{für } z \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $z = \bar{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$.

Komplexe Zahlen

Betragsfunktion

Setze

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

für den **Betrag** von z sowie $|w - z|$ für den **Abstand** zweier Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene.

Abschätzungen

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \text{und} \quad -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z| \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Satz

Die Betragsfunktion liefert eine **Norm** auf \mathbb{C} , d.h.

- $|z| \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$;
- $|w + z| \leq |w| + |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ (**Dreiecksungleichung**);
- $|wz| = |w| \cdot |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$.

Komplexe Zahlen

Betragsfunktion

Komplexe Zahlen

Die Eulersche Formel

In der komplexen Zahlenebene gilt für

$$z = x + iy$$

mit den **Polarkoordinaten**

$$(x, y) = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

die **Eulersche Formel**

$$z = |z| \exp(i\varphi) = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)),$$

wobei $\varphi \in (-\pi, \pi]$ für $z \neq 0$ den (eindeutigen) Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl von 0 durch $z = (x, y)$ darstellt. Der Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ wird ebenso als **Argument** von $z \neq 0$ bezeichnet, kurz

$$\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi].$$

Komplexe Zahlen

Die Eulersche Formel

Komplexe Zahlen

Zur Geometrie der Multiplikation

Mit der Verwendung von Polarkoordinaten lässt sich die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ als **Drehstreckung** in der komplexen Zahlenebene interpretieren, denn für

$$w = |w|(\cos(\psi), \sin(\psi)) \quad \text{und} \quad z = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

gilt

$$\begin{aligned}wz &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi) + i \sin(\psi))(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \\ &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi + \varphi) + i \sin(\psi + \varphi)) = |w| \cdot |z| \exp(i(\psi + \varphi))\end{aligned}$$

bzw. mit der Eulerschen Formel

$$wz = |w| \cdot |z| \exp(i\psi) \cdot \exp(i\varphi) = |w| \cdot |z| \exp(i(\psi + \varphi)).$$

Komplexe Zahlen

Zur Geometrie der Division

Für die Division zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ gilt analog

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} \exp(i(\psi - \varphi)) = \frac{|w|}{|z|} (\cos(\psi - \varphi) + i \sin(\psi - \varphi)).$$

Beispiele

Komplexe Zahlen

Potenzen und Einheitswurzeln

Für die **n -te Potenz** z^n , $n \in \mathbb{N}$, von $z \in \mathbb{C}$ gilt die Darstellung

$$z^n = (|z| \exp(i\varphi))^n = |z|^n \exp(in\varphi) = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Die Gleichung

$$z^n = 1$$

besitzt die n paarweise verschiedenen Lösungen

$$z_k = \exp\left(i\frac{2\pi k}{n}\right) \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1.$$

Diese Lösungen werden als **n -te Einheitswurzeln** bezeichnet.

Komplexe Zahlen

Potenzen und Einheitswurzeln

Komplexe Funktionen

Komplexe Funktionen - Begriff und geometrische Deutung

Definition

Eine **komplexe Funktion** ist eine Funktion, deren Definitions- und Wertebereich jeweils Punktmenge der komplexen Ebene sind.

Bemerkung

Eine komplexe Funktion $f : A \rightarrow B$ mit Definitionsbereich $A \subset \mathbb{C}$ und Wertebereich $B \subset \mathbb{C}$ ordnet jedem $z \in A$ ein eindeutiges $w = f(z) \in B$ zu.

Im konkreten Fall ist diese eindeutige Zuordnung

$$f : z \mapsto f(z) \quad \text{für } z \in A$$

durch eine *explizite* Abbildungsvorschrift gegeben.

Komplexe Funktionen - Begriff und geometrische Deutung

Beispiele

- $f(z) = (3z + 1)^2$ für $z \in \mathbb{C}$;
- $f(z) = \exp(ix) + y$ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$;
- $f(z) = 1/z$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Bemerkung

Man verwendet üblicherweise das Symbol $z \in \mathbb{C}$ für die **Variable** und $w \in \mathbb{C}$ für den **Wert** von f , also $w = f(z)$. Weiterhin notieren wir $z = x + iy$ und

$$w = u + iv \quad \text{d.h. } u = \operatorname{Re}(w) \text{ und } v = \operatorname{Im}(w)$$

bzw.

$$u(z) = \operatorname{Re}(f(z)) \quad \text{und } v(z) = \operatorname{Im}(f(z)).$$

Komplexe Funktionen - Begriff und geometrische Deutung

Wie stellen wir f graphisch dar?

Wir skizzieren den Definitionsbereich und den Wertebereich in zwei verschiedenen komplexen Ebenen, der z -Ebene (Urbildebene) und der w -Ebene (Bildebene).

Komplexe Funktionen - Begriff und geometrische Deutung

Komplexe Funktionen einer reellen Variablen

Wir betrachten gelegentlich komplexwertige Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ mit einer **reellen** Variablen, d.h. für einen Definitionsbereich $I \subset \mathbb{R}$,

$$f : t \mapsto f(t) \in \mathbb{C} \quad \text{für } t \in I.$$

Beispiele.

- $f(t) = a + bt$ für $a, b \in \mathbb{C}$, wobei $b \neq 0$;
- $f(t) = \exp(i\omega t)$ für $\omega \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}$;

Komplexe Funktionen - Begriff und geometrische Deutung

Definition

Eine komplexe Funktion f heißt **affin linear**, falls f für feste komplexe Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, eine Darstellung der folgenden Form besitzt.

$$f(z) = az + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Frage

Wie können wir lineare Funktionen geometrisch deuten?

Affin lineare komplexe Funktionen

Spezialfall 1:

Die Wahl $a = 1$ führt zu einer **Translation** um b ,

$$f(z) = z + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Spezialfall 2:

Die Wahl $a \in (0, \infty)$ und $b = 0$ führt zu einer **Streckung**
bzw. **Stauchung**,

$$f(z) = az \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

d.h. die Variable z wird gestreckt ($a > 1$) oder **gestaucht** ($0 < a < 1$).
Allgemein spricht man von einer **Skalierung** mit **Skalierungsfaktor**
 $a > 0$.

Affin lineare komplexe Funktionen

Spezialfall 3:

Die Wahl $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ und $b = 0$ führt zu einer **Drehung**

$$f(z) = az \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

genauer: Drehung um Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$, wobei $\alpha = \arg(a)$,
bzw. $a = \exp(i\alpha)$.

Affin lineare komplexe Funktionen

Spezialfall 4:

Die Wahl $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, und $b = 0$ führt zu einer **Drehstreckung**

$$f(z) = az \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

die wir als Komposition einer Rotation und einer Skalierung verstehen.
Genauer gilt: Für

$$a = |a| \exp(i\alpha) \quad \text{mit } \alpha = \arg(a)$$

handelt es sich um eine Rotation um Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ und Skalierung um $|a|$.

Affin lineare komplexe Funktionen

Allgemeiner Fall:

Für $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von drei Abbildungen schreiben:

- $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$ eine Drehung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$;
- $f_2(z) = |a|z$ eine Streckung um den Skalierungsfaktor $|a| > 0$;
- $f_3(z) = z + b$ eine Verschiebung um den Vektor b .

Affin lineare komplexe Funktionen

Bemerkung:

Drehung f_1 und Streckung f_2 **kommutieren**, d.h. lassen sich vertauschen, denn es gilt

$$f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$$

und somit

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_1 \circ f_2.$$

Komplexe Funktionen - Begriff und geometrische Deutung

Definition: Quadratische Funktionen

Eine komplexe Funktion f heißt **quadratisch**, falls f für feste Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, eine Darstellung der folgenden Form besitzt.

$$f(z) = az^2 + bz + c \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Quadratische komplexe Funktionen

Wir betrachten zunächst das geometrische Verhalten der quadratischen Funktion

$$f(z) = z^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Dazu betrachten wir die Bilder der achsenparallelen Geraden unter f . Setze $w = z^2$. Dann ergibt die für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ die Darstellung

$$w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

und somit

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad v = 2xy.$$

Quadratische komplexe Funktionen

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$

Für das Bild einer zur x -Achse parallelen Geraden $y \equiv y_0$ bekommt man somit

$$\begin{aligned}u &= x^2 - y_0^2 \\v &= 2xy_0\end{aligned}$$

Für $y_0 = 0$ (die x -Achse) bekommen wir $u = x^2$ und $v = 0$.

Für $y_0 \neq 0$ können wir x mit $x = v/(2y_0)$ eliminieren, und bekommen somit

$$u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2$$

eine nach rechts geöffnete Parabel, symmetrisch zur u -Achse mit Brennpunkt Null, und den Schnittpunkten $u = -y_0^2$ (mit u -Achse) und $v = \pm 2y_0^2$ (v -Achse).

Quadratische komplexe Funktionen

Fazit:

Die Schar zur y -Achse paralleler Geraden wird durch die Funktion $f(z) = z^2$ auf eine Schar konfokaler nach links geöffneter Parabeln abgebildet.

Die Geraden $x \equiv x_0$ und $x \equiv -x_0$ werden auf die gleiche Parabel abgebildet.

Quadratische komplexe Funktionen

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$.

Für das Bild einer zur y -Achse parallelen Geraden $x \equiv x_0$ bekommt man somit

$$\begin{aligned}u &= x_0^2 - y^2 \\v &= 2x_0y\end{aligned}$$

Für $x_0 = 0$ (die y -Achse) bekommen wir $u = -y^2$ und $v = 0$.

Für $x_0 \neq 0$ können wir y mit $y = v/(2x_0)$ eliminieren, und bekommen somit

$$u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$$

eine nach links geöffnete Parabel, symmetrisch zur u -Achse mit Brennpunkt Null, und den Schnittpunkten $u = -x_0^2$ (mit u -Achse) und $v = \pm 2x_0^2$ (v -Achse).

Quadratische komplexe Funktionen

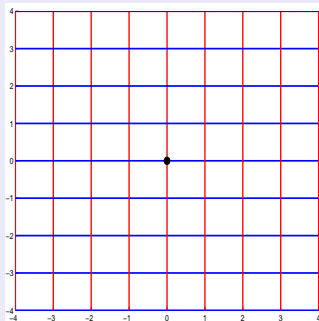
Fazit

Die Schar zur x -Achse paralleler Geraden wird durch die quadratische Funktion $f(z) = z^2$ auf eine Schar **konfokaler** (d.h. gleiche Symmetrieachse, gleicher Brennpunkt) nach rechts geöffneter Parabeln abgebildet.

Die Geraden $y \equiv y_0$ und $y \equiv -y_0$ werden auf die gleiche Parabel abgebildet.

Quadratische komplexe Funktionen

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$.



Variable.

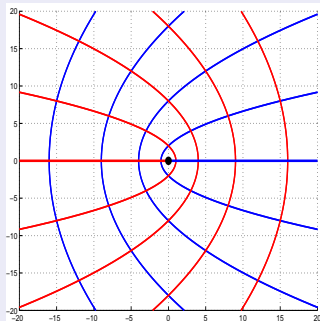


Bild von $f(z) = z^2$.

Quadratische komplexe Funktionen

Allgemeine quadratische komplexe Funktionen

Für $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, und mit der Darstellung

$$f(z) = az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

setzt sich jede quadratische Funktion als Komposition

$$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von vier Abbildungen zusammen:

- der Translation $f_1(z) = z + \frac{b}{2a}$;
- der quadratischen Funktion $f_2(z) = z^2$;
- der Drehstreckung $f_3(z) = az$;
- der Translation $f_4(z) = z - \frac{b^2}{4a} + c$.

Komplexe Funktionen

Komplexe Exponentialfunktion

Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Eigenschaften

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y)),$$

und somit

$$u = e^x \cos(y) \quad \text{und} \quad v = e^x \sin(y).$$

Komplexe Funktionen

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$

Für das Bild einer zur x -Achse parallelen Geraden $y \equiv y_0$ bekommt man somit

$$u = e^x \cos(y_0)$$

$$v = e^x \sin(y_0)$$

- Für festes y_0 ergibt dies ein vom Ursprung ausgehenden Strahl, der mit der positiven x -Achse den Winkel y_0 einschließt.
- Für Winkel y_0 und y_1 , die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, d.h.

$$y_1 = y_0 + 2\pi k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

ergibt sich der gleiche Strahl.

Komplexe Funktionen

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$

Für das Bild einer zur x -Achse parallelen Geraden $y \equiv y_0$ bekommt man somit

$$u = e^x \cos(y_0)$$

$$v = e^x \sin(y_0)$$

- Genauer: Wegen der **Periodizität** von $\exp(z)$ gilt

$$e^{z+2\pi ik} = e^z e^{2\pi ik} = e^z (\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k)) = e^z \cdot 1 = e^z.$$

d.h. zwei Punkte mit gleichen Realteilen, deren Imaginärteile sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden, werden auf den gleichen Punkt abgebildet.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$

- Für das Bild einer zur y -Achse parallelen Geraden $x \equiv x_0$ bekommt man

$$u = e^{x_0} \cos(y) \quad \text{und} \quad v = e^{x_0} \sin(y)$$

- Für festes x_0 ergibt dies einen Kreis um Null mit Radius e^{x_0} .
- **Beachte:** Der Nullpunkt liegt nicht im Bild der Exponentialfunktion, d.h. es

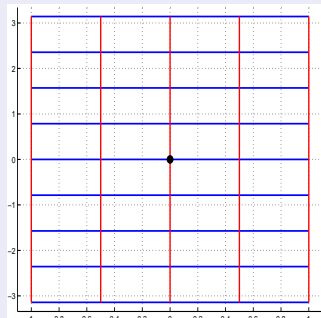
gibt kein $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$. Somit gilt $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$

- **Beobachtung:** Die Exponentialfunktion bildet Rechtecksgitter im kartesischen Koordinatensystem auf Netz von Kurven ab, die sich rechtwinklig schneiden.
- **Genauer:** Kurven, die sich im kartesischen Koordinatensystem rechtwinklig schneiden, werden unter der Exponentialfunktion \exp auf Kurven abgebildet, die sich ebenso (im jeweiligen Schnittpunkt) rechtwinklig schneiden.
- **Noch allgemeiner:** Die Exponentialfunktion ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ **winkeltreu** (bzw. **konform**). Genauere Details dazu später.

Komplexe Funktionen

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$



Variable.

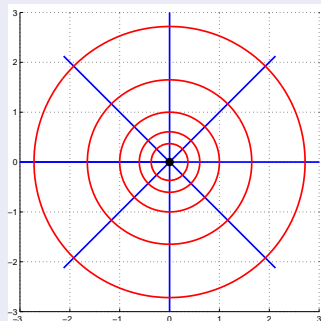


Bild von $f(z) = \exp(z)$.

Komplexe Funktionen

Definition (Umkehrfunktion)

Eine komplexe Funktion f heißt **injektiv**, wenn es zu jedem Punkt $w \in \mathbb{C}$ ihres Wertebereichs genau einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ ihres Definitionsbereichs gibt mit $f(z) = w$.

Beispiele

- die lineare Funktion $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, ist injektiv.
- die quadratische Funktion $f(z) = z^2$, ist *nicht* injektiv, denn es gilt bspw. $f(1) = f(-1)$.
- die komplexe Exponentialfunktion $\exp(z)$ ist *nicht* injektiv, denn es gilt $\exp(z) = \exp(z + 2\pi ik)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \mathbb{C}$.

Komplexe Funktionen

Einschränkung des Definitionsbereichs

Eine nicht injektive Funktion wird ggf. durch eine geeignete Einschränkung ihres Definitionsbereichs injektiv.

Beispiel: Betrachte die quadratische Funktion

$$f(z) = z^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(z) > 0$$

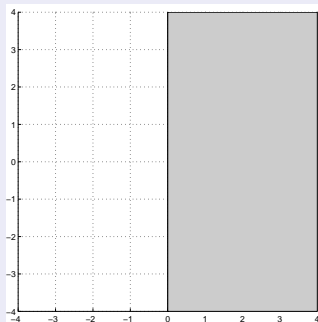
auf der **rechten Halbebene** $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Hier ist f injektiv.

Weiterhin ist in diesem Fall der Bildbereich gegeben durch die **aufgeschnittene komplexe Ebene**

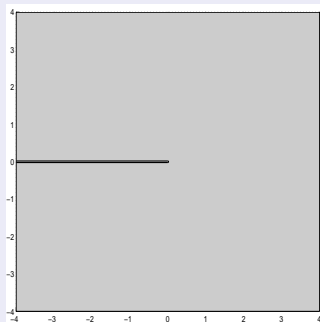
$$\begin{aligned} \mathbb{C}^a &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(z) > 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\} \end{aligned}$$

Komplexe Funktionen

Einschränkung des Definitionsbereichs



**rechte Halbebene
(Definitionsbereich)**



**aufgeschnittene komplexe Ebene \mathbb{C}^a
(Wertebereich)**

Komplexe Funktionen - Umkehrfunktion

Definition

Sei f eine injektive Funktion mit Definitionsbereich $D(f)$ und Wertebereich $W(f)$. Dann ist die **Umkehrfunktion** $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ zu f diejenige Funktion, die jedem Punkt $w \in W(f)$ den (eindeutigen) Punkt $z \in D(f)$ mit $f(z) = w$ zuordnet, d.h. es gilt $f^{-1}(w) = z$ bzw.

$$(f^{-1} \circ f)(z) = z \quad \text{für alle } z \in D(f)$$

$$(f \circ f^{-1})(w) = w \quad \text{für alle } w \in W(f)$$

Komplexe Funktionen - Umkehrfunktion

Beispiel: Umkehrfunktion der n -ten Potenz

Die Potenzfunktion

$$f(z) = z^n \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 2$$

ist für den Definitionsbereich

$$D(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n} \right\}$$

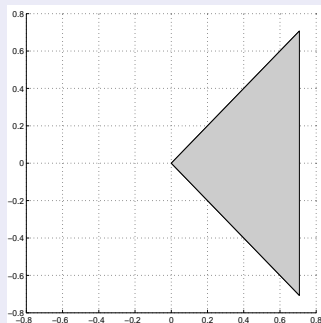
injektiv. Für den Wertebereich bekommt man in diesem Fall
 $W(f) = \mathbb{C}^a$.

Für die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ gilt

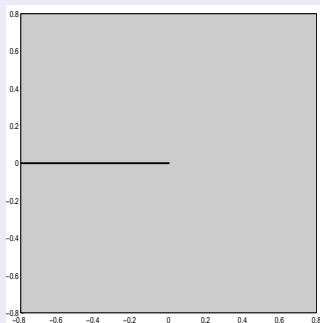
$$w = f^{-1}(z) = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n} \quad \text{für } z = r e^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right).$$

Komplexe Funktionen - Umkehrfunktion

Beispiel: $n = 4$: Betrachte die Funktion $z \mapsto z^4$



$\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \in (-\pi/4, \pi/4)\}$ aufgeschnittene komplexe Ebene \mathbb{C}
(Definitionsbereich)



Komplexe Funktionen - Umkehrfunktion

Umkehrung der komplexen Exponentialfunktion $f(z) = \exp(z)$

Beachte: Die Exponentialfunktion $\exp(z)$ ist für *alle* $z \in \mathbb{C}$ erklärt, und es gilt

$$D(\exp) = \mathbb{C} \quad \text{und} \quad W(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Aber: Die Exponentialfunktion ist nicht injektiv auf \mathbb{C} .

Also: Zur Konstruktion einer Umkehrfunktion \exp^{-1} von \exp müssen wir den Definitionsbereich von \exp geeignet einschränken.

Frage: Sei $z = x + iy \in W(\exp)$. Welche Werte $w = u + iv$ kommen in Frage, so dass

$$e^w = z ?$$

Komplexe Funktionen - Umkehrfunktion

Konstruktion des komplexen Logarithmus

Für $z = x + iy \in W(\exp)$ soll gelten

$$e^w = z \quad \text{für ein } w = u + iv \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt

$$|e^w| = |e^u| = |z|$$

und somit $u = \log(|z|)$, wobei $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ der *reelle* Logarithmus.
Weiterhin gilt

$$\arg(e^w) = \arg(e^{u+iv}) = \arg(e^u e^{iv}) = v$$

und somit $v = \arg(z)$.

Komplexe Funktionen - Umkehrfunktion

Konstruktion des komplexen Logarithmus (cont.)

Daher besteht die Menge der Lösungen von $e^w = z$ aus den komplexen Zahlen

$$w = \log(|z|) + i(\arg(z) + 2\pi k) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

und jedes $w \in \mathbb{C}$ mit $e^w = z$ heißt **Logarithmus** von z . Für $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet die Menge

$$[\text{Log}(z)] := \exp^{-1}(\{z\}) = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$$

den **mengenwertigen komplexen Logarithmus** von z .

Komplexe Funktionen - der mengenwertige komplexe Logarithmus

Beispiel 1

Wie sieht der mengenwertige komplexe Logarithmus $[\text{Log}(-1)]$ von -1 aus?

Zunächst gilt $\log(|-1|) = \log(1) = 0$.

Die Zahlen $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ sind die Argumente von -1 . Somit gilt

$$[\text{Log}(-1)] = \{i(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

für die Werte des Logarithmus von -1 .

Komplexe Funktionen - der mengenwertige komplexe Logarithmus

Beispiel 2

Wie sieht der komplexe Logarithmus $[\text{Log}(-1 + i)]$ von $-1 + i$ aus? Zunächst gilt $|-1 + i| = \sqrt{2}$ und weiterhin ist $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$ ein mögliches Argument von $-1 + i$. Somit gilt

$$[\text{Log}(-1 + i)] = \left\{ \log(\sqrt{2}) + i \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

für die Werte des Logarithmus von $-1 + i$.

Beispiel 3

Für $x > 0$ gilt

$$[\text{Log}(x)] = \{ \log(x) + 2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Komplexe Funktionen - Hauptwert des Logarithmus

Hauptwert des Logarithmus.

Die vorherigen Überlegungen zur Gleichung

$$z = e^w$$

zeigten, dass die Exponentialfunktion auf dem Streifen

$$S = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(w) < \pi\}$$

injektiv ist. Der zugehörige Wertebereich ist \mathbb{C}^* .

Der einzige Wert von $[\operatorname{Log}(z)]$, der zu dem Streifen S gehört, ist

$$w = \log(|z|) + i \arg(z) \quad \text{mit } -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Dieser Wert heißt der **Hauptwert des Logarithmus** von z , kurz $\operatorname{Log}(z)$.

Komplexe Funktionen - Hauptwert des Logarithmus

Bemerkung

Der Hauptwert des Logarithmus ist nur in der aufgeschnittenen komplexen Ebene \mathbb{C}^a definiert. Auf der negativen reellen Achse und bei $z = 0$ ist $\log(z)$ nicht definiert. Auf der positiven reellen Achse stimmt $\text{Log}(z)$ mit dem reellen Logarithmus $\log(x)$ überein.

Komplexe Funktionen - Allgemeine Potenz

Definition

Für $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ bezeichnet $[a^b]$ die Menge der komplexen Zahlen

$$e^{b[\text{Log}(a)]} = \{e^{bz} \mid z \in [\text{Log}(a)]\}$$

Somit gilt

$$[a^b] = \left\{ e^{b(\log(|a|) + i(\alpha + 2\pi k))} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

wobei $\alpha = \arg(a)$. Liegt a in der aufgeschnittenen komplexen Ebene, $a \in \mathbb{C}^a$, so enthält die Menge $[a^b]$ den Wert

$$e^{b \text{Log}(a)} = e^{b(\log(|a|) + i\alpha)} \quad \text{mit } \alpha = \arg(a) \in (-\pi, \pi).$$

Dieser Wert heißt der **Hauptwert** von $[a^b]$.

Komplexe Funktionen - Allgemeine Potenz

Beispiel

1.) Sei $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b = n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} [a^b] &= \left\{ e^{n(\log(r)+i\alpha+2\pi ik)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{n\log(r)+in\alpha+2\pi ink} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ r^n e^{in\alpha} e^{2\pi ink} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ (re^{i\alpha})^n \right\} = \left\{ r^n e^{in\alpha} \right\} = \underbrace{\{a \cdot \dots \cdot a\}}_{n\text{-mal}} \end{aligned}$$

2.) Für $x > 0$ ist

$$e^{i \operatorname{Log}(x)} = \cos(\log(x)) + i \sin(\log(x))$$

Hauptwert von $[x^i]$.

Beispiel

3.) Sei $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} [a^{1/n}] &= \left\{ e^{(1/n)(\log(r)+i\alpha+2\pi ik)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ r^{1/n} e^{i\alpha/n} e^{2\pi ik/n} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ r^{1/n} e^{i\alpha/n} e^{2\pi ik/n} \mid 0 \leq k < n \right\} \end{aligned}$$

d.h. die Werte z von $[a^{1/n}]$ sind die n -ten Wurzeln von a , so dass $z^n = a$.

Der Hauptwert ist $r^{1/n} e^{i\alpha/n}$ für $\alpha/n = \arg(a)/n \in (-\pi/n, \pi/n)$.

Komplexe Funktionen - Allgemeine Potenz

Bemerkung

Die aus der reellen Analysis bekannte Funktionalgleichung

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \quad \text{für alle } a, b > 0$$

gilt für Hauptwerte des komplexen Logarithmus im Allgemeinen **nicht**, d.h. es gibt $a, b \in \mathbb{C}^a$ mit

$$\text{Log}(ab) \neq \text{Log}(a) + \text{Log}(b),$$

Beispiel

Für $a = i$ und $b = -1 + i$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \text{Log}(i) + \text{Log}(-1 + i) &= i\frac{\pi}{2} + \log(\sqrt{2}) + i\frac{3}{4}\pi = \log(\sqrt{2}) + i\frac{5}{4}\pi \\ &\neq \log(\sqrt{2}) - i\frac{3}{4}\pi = \text{Log}(-1 - i) = \text{Log}(i(-1 + i)) \end{aligned}$$

Komplexe Funktionen - Allgemeine Potenz

Weitere Bemerkung

Es gilt die Gleichung

Hauptwert von $[a^b] \cdot$ Hauptwert von $[a^c] =$ Hauptwert von $[a^{b+c}]$.

Beweis: Mit $\alpha := \arg(a) \in (-\pi, \pi)$ ist

$$A := e^{b(\log(|a|)+i\alpha)}$$

der Hauptwert von $[a^b] = \{e^{b(\log(|a|)+i(\alpha+2\pi k))}\}$.

Komplexe Funktionen - Allgemeine Potenz

Weitere Bemerkung (cont.)

Genauso ist

$$B := e^{c[\log(|a|)+i\alpha]}$$

der Hauptwert von $[a^c]$ und

$$C := e^{(b+c)[\log(|a|)+i\alpha]}$$

der Hauptwert von $[a^{b+c}]$.

Schließlich gilt

$$A \cdot B = e^{b(\log(|a|)+i\alpha)} \cdot e^{c(\log(|a|)+i\alpha)} = e^{(b+c)(\log(|a|)+i\alpha)} = C.$$

Joukowski-Funktion

Die **Joukowski-Funktion**, definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{für } z \neq 0,$$

ist im Zusammenhang mit Strömungsproblemen von Interesse (Details später).

Beobachtung: Es gilt die Symmetrie

$$f(z) = f(1/z) \quad \text{für } z \neq 0.$$

Ziel: Analysiere das geometrische Verhalten der Joukowski-Funktion.

Komplexe Funktionen

Joukowski-Funktion

Bestimme dazu für

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

die Bilder der Kreise $|z| \equiv \text{const}$ und der Strahlen $\arg(z) \equiv \text{const}$.

Komplexe Funktionen

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{und} \quad w = u + iv$$

bekommen wir

$$u + iv = \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right)$$

und somit

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin(\varphi).$$

Komplexe Funktionen

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für das Bild des Kreises $r \equiv r_0 > 0$ bekommen wir die Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \cos(\varphi) \\ v &= \frac{1}{2} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right) \sin(\varphi) \end{aligned} \right\} 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

für den Einheitskreis $r_0 \equiv 1$ somit $u = \cos(\varphi)$, für $0 \leq \varphi < 2\pi$, und $v \equiv 0$, also die Strecke zwischen den Punkten -1 und 1 , die *zweimal* durchlaufen wird.

Komplexe Funktionen

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion

Für $r_0 \neq 1$ können wir φ eliminieren, womit man die Ellipse

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right)^2} = 1$$

mit den Halbachsen

$$a = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{2} \left| r_0 - \frac{1}{r_0} \right|$$

und Brennpunkten ± 1 bekommt.

Fazit

Die Joukowski-Funktion bildet eine Schar von Kreisen $r \equiv \text{const}$ auf eine Schar **kofokaler Ellipsen** ab. Die beiden Kreise $r \equiv r_0$ und $r \equiv 1/r_0$ werden dabei auf die gleiche Ellipse abgebildet.

Komplexe Funktionen

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion

Für das Bild eines Strahls $\varphi \equiv \varphi_0$ bekommt man

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos(\varphi_0) \\ v &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin(\varphi_0) \end{aligned} \right\} 0 < r < \infty,$$

für die positive x -Achse $\varphi_0 = 0$ somit

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} 0 < r < \infty,$$

das Stück $\{(u,0) \mid 1 \leq u < \infty\}$ der u -Achse.

Analog erhalten wir für die negative x -Achse $\varphi_0 = \pi$ das Stück $-\infty < u < -1$.

Die Strahlen $\varphi_0 = \pi/2$ (positive y -Achse) und $\varphi_0 = 3\pi/2$ (negative y -Achse) werden auf die komplette v -Achse abgebildet.

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion

Falls $\varphi_0 \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, so können wir r eliminieren, womit wir die Hyperbel

$$\frac{u^2}{\cos^2(\varphi_0)} - \frac{v^2}{\sin^2(\varphi_0)} = 1$$

mit den Halbachsen

$$a = |\cos(\varphi_0)| \quad \text{und} \quad b = |\sin(\varphi_0)|$$

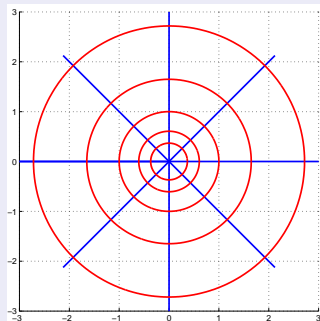
bekommen. Der Abstand der Brennpunkte der Hyperbel von Zentrum beträgt

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\cos^2(\varphi_0) + \sin^2(\varphi_0)} = 1.$$

Somit liegen die beiden Brennpunkte bei ± 1 .

Komplexe Funktionen

Bilder unter der Joukowski-Funktion.



Variable

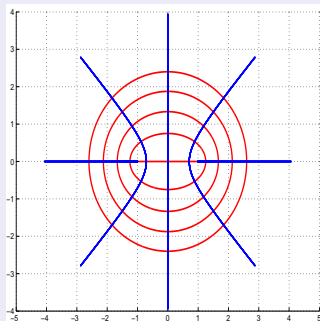


Bild der Joukowski-Funktion.

Komplexe Funktionen - Joukowski-Funktion

Weitere Bemerkungen zur Joukowski-Funktion

- Die Joukowski-Funktion bildet das Polarkoordinatennetz auf ein Netz von Ellipsen und Hyperbeln ab, die sich jeweils im rechten Winkel schneiden. Die Joukowski-Funktion ist winkeltreu.
- Die Joukowski-Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *nicht* injektiv, denn für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, 0\}$ gilt $z \neq 1/z$, aber $f(z) = f(1/z)$.

Komplexe Funktionen - Joukowski-Funktion

Weitere Bemerkungen zur Joukowski-Funktion

- Auf den folgenden zwei Einschränkungen ihres Definitionsbereichs ist die Joukowski-Funktion injektiv.
 - (a) Auf dem **Komplement des Einheitskreises**
 $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.
 - (b) Auf der **oberen Halbebene** $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$.
- Die Umkehrfunktion $w = f^{-1}(z)$ der Joukowski-Funktion $f(w)$ bekommt man durch Auflösen resultierenden der quadratischen Gleichung

$$w^2 - 2zw + 1 = 0$$

nach w in dem jeweiligen Definitionsbereich $D(f)$, somit

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Komplexe Funktionen

Komplexe trigonometrische Funktionen

Die Beziehungen der **Eulerschen Formel** sind für $x \in \mathbb{R}$ schon bekannt.

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \cos(x) + i \sin(x) \\e^{-ix} &= \cos(x) - i \sin(x)\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich durch Addition bzw. Subtraktion die Formeln

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) && \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) && \text{für } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Die rechten Seiten sind jedoch auch für beliebige komplexe Zahlen definiert. Somit setzen wir

$$\cos z := \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z := \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Komplexe Funktionen - trigonometrische Funktionen

Rechenregeln für komplexe trigonometrische Funktionen

Es gilt

$$\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$$

$$\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Fazit

Die komplexen trigonometrischen Funktionen \sin und \cos sind (genauso wie die reellen trigonometrischen Funktionen) periodisch mit Periode 2π .

Komplexe Funktionen - trigonometrische Funktionen

Weitere Rechenregeln für komplexe trigonometrische Funktionen

Symmetrie

$$\cos(z) = \cos(-z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) = -\sin(-z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

Phasenverschiebung

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(z)$$

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(z)$$

Komplexe Funktionen - trigonometrische Funktionen

Weitere Rechenregeln für komplexe trigonometrische Funktionen

Reihendarstellung

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Zerlegung der Eins

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Additionstheoreme

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2) \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1) \cos(z_2) + \cos(z_1) \sin(z_2) \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Möbius-Transformation

Die stereographische Projektion

Vorbemerkungen

Bei der Untersuchung rationaler Funktionen

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{mit Polynomen } p, q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

ist es sinnvoll, die *Lücken* des Definitionsbereichs (d.h. die Nullstellen von $q(z)$) dadurch zu schließen, dass man $R(z)$ dort den “Wert” ∞ zuordnet, sofern nicht gleichzeitig der Zähler $p(z)$ dort verschwindet.

Notation

Falls $z^* \in \mathbb{C}$ Nullstelle von q , d.h. $q(z^*) = 0$, und $p(z^*) \neq 0$, so schreibt man $R(z^*) := \infty$, d.h. der Wertebereich von R wird um die “Zahl” ∞ erweitert.

Definition

In der Erweiterung $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ der komplexen Zahlenebene wird ∞ als **unendlich ferner Punkt** bezeichnet.

Die stereographische Projektion

Erweiterung der Rechenregeln für \mathbb{C}^*

Auf der erweiterten komplexen Zahlenebene \mathbb{C}^* werden folgende Rechenregeln (zusätzlich zu den üblichen Rechenregeln in \mathbb{C}) vereinbart.

$$a + \infty := \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{C}$$

$$a \cdot \infty := \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$a/\infty := 0 \quad \text{für } a \in \mathbb{C}$$

Warnung

Die Verknüpfungen $0 \cdot \infty$ und $\infty \pm \infty$ lassen sich nicht sinnvoll (d.h. nicht widerspruchsfrei) definieren.

Die stereographische Projektion

Topologische Bedeutung

Die erweiterte komplexe Zahlenebene \mathbb{C}^* ist ein **topologischer Raum**. Für eine komplexe Zahlenfolge $\{z_n\}_n$, $z_n \neq 0$, gilt

$$z_n \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \iff \quad 1/z_n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

\mathbb{C}^* ist **folgenkompakt**, d.h. *jede* Folge in \mathbb{C}^* besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt. Daher wird \mathbb{C}^* als **Kompaktifizierung** von \mathbb{C} bezeichnet.

Die stereographische Projektion

Definition

Die **stereographische Projektion** ist diejenige Abbildung $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ der **Riemannschen Zahlenkugel** $\mathbb{S}^2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \|X\| = 1\}$ auf die erweiterte komplexe Ebene \mathbb{C}^* , die jedem Punkt $X \in \mathbb{S}^2$, $X \neq N = (0,0,1)^T$, den Durchstoßpunkt $P(X)$ der Geraden durch X und N durch die X_1 - X_2 -Ebene zuordnet, und weiterhin $P(N) := \infty$.

Darstellung

$$z = P(X) = \frac{X_1 + iX_2}{1 - X_3} \in \mathbb{C}^* \quad \text{für } X = (X_1, X_2, X_3)^T \in \mathbb{S}^2.$$

Die stereographische Projektion

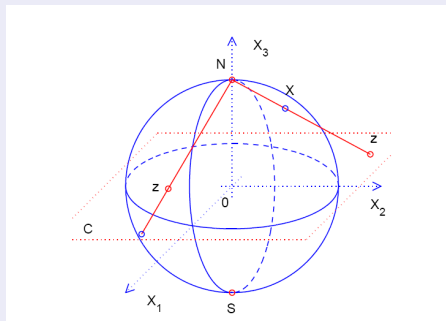
Bemerkungen

- Die stereographische Projektion $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist bijektiv.
- Die Umkehrabbildung P^{-1} von P ist gegeben durch

$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T \in \mathbb{S}^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^*.$$

Die stereographische Projektion

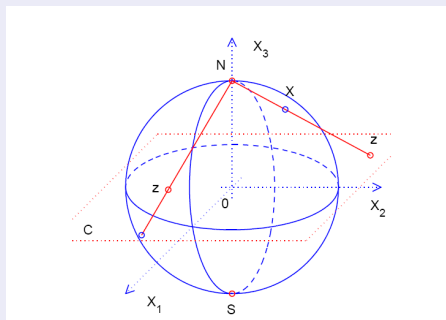
Die stereographische Projektion $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$.



- Die obere Hälfte der Kugel \mathbb{S}^2 (die obere Halbkugel) wird durch P auf $|z| > 1$ abgebildet, die untere Hälfte (untere Halbkugel) wird auf $|z| < 1$ abgebildet.

Die stereographische Projektion

Die stereographische Projektion $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$.



- Der Äquator

$$A = \{X \in \mathbb{S}^2 \mid X = (X_1, X_2, 0)^T\}$$

bleibt fest, d.h. jeder Punkt $a \in A$ ist Fixpunkt von P , so dass $P(a) = a$.

Die stereographische Projektion

Geometrie der stereographischen Projektion.

Unter einem **sphärischen Bild** U einer Menge $B \subset \mathbb{C}^*$ verstehen wir im folgenden das Urbild unter der stereographischen Projektion, so dass $P(U) = B$.

Satz

Für die stereographische Projektion gelten folgende Eigenschaften.

- Das sphärische Bild einer Geraden in \mathbb{C}^* ist ein Kreis auf \mathbb{S}^2 , der durch N geht.
- Ein Kreis auf \mathbb{S}^2 , der durch N geht, wird durch die stereographische Projektion auf eine Gerade in \mathbb{C}^* abgebildet.
- Das sphärische Bild eines Kreises in \mathbb{C} ist ein Kreis auf \mathbb{S}^2 , der nicht durch N geht.
- Ein Kreis auf \mathbb{S}^2 , der nicht durch N geht, wird durch die stereographische Projektion auf einen Kreis in \mathbb{C} abgebildet.
- Die stereographische Projektion ist **kreistreu**.

Möbius-Transformation

Definition

Eine rationale Abbildung der Form

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad \neq bc$$

heißt **Möbius-Transformation**.

Bemerkungen

Für eine Möbius-Transformation $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ gilt:

- Zähler und Nenner haben verschiedene Nullstellen.
- $T(-d/c) = \infty$ und $T(\infty) = a/c$.
- $T(z)$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $T^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$,

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Möbius-Transformation

Beachte

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Möbius-Transformation

Satz (Komposition von Möbius-Transformationen)

Die Komposition zweier Möbius-Transformationen ist eine Möbius-Transformation. Genauer gilt:

$$w = T_1(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für } ad \neq bc$$

$$\begin{aligned} u = (T_2 \circ T_1)(z) = T_2(w) &= \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} \quad \text{für } \alpha\delta \neq \beta\gamma \\ &= \frac{Az + B}{Cz + D} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Möbius-Transformation

Satz (Kreistreue von Möbius-Transformationen)

Möbius-Transformationen sind *kreistreu*, d.h. (verallgemeinerte) Kreise in \mathbb{C}^* gehen durch Möbius-Transformationen in (verallgemeinerte) Kreise über.

Beweis: Sei $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad \neq bc$ eine Möbius-Transformation.

Fall (a): Für $c = 0$ ist T linear und somit kreistreu.

Fall (b): Für $c \neq 0$ zerlegen wir T wie folgt.

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \frac{1}{cz + d}.$$

Im Folgenden zeigen wir, dass $f(z) = 1/z$ kreistreu ist.

Denn: Dann ist $T(z)$ (als Komposition kreistreuer Abbildungen) kreistreu.

Um zu zeigen, dass f kreistreu ist, wenden wir die (kreistreue!) stereographische Projektion auf $w = 1/z$ an.

Möbius-Transformation

Beweis (cont.):

Es gilt

$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T \in \mathbb{S}^2$$

Für das Bild von $1/z$ unter P^{-1} bekommen wir somit

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= F(X) = P^{-1}(1/z) \\ &= \left(\frac{1/z + 1/\bar{z}}{1 + (1/z)(1/\bar{z})}, \frac{1/z - 1/\bar{z}}{i(1 + (1/z)(1/\bar{z}))}, \frac{(1/z)(1/\bar{z}) - 1}{1 + (1/z)(1/\bar{z})} \right)^T \\ &= \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, -\frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, -\frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T \\ &= (X_1, -X_2, -X_3)^T \end{aligned}$$

Möbius-Transformation

Beweis (cont.):

Beachte: $F(X)$ beschreibt eine Drehung um die X_1 -Achse um den Winkel π .

Die Abbildung $F(X)$ ist offensichtlich kreistreu, und somit ist die Komposition

$$f(z) = P \circ F \circ P^{-1}$$

kreistreu. □

Möbius-Transformation

Bemerkung

Für eine Möbius-Transformation

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad \neq bc$$

gelten die folgenden Eigenschaften.

- (Verallgemeinerte) Kreise durch den Punkt $-d/c$ werden durch T auf Geraden in der w -Ebene abgebildet.
- Alle Geraden der z -Ebene werden durch T in (verallgemeinerte) Kreise der w -Ebene durch den Punkt a/c abgebildet.
- Kreise, die *nicht* durch den Punkt $-d/c$ gehen, werden durch T in Kreise abgebildet, die *nicht* durch den Punkt a/c gehen.

Doppelverhältnisse und Möbius-Transformationen

Satz

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ und $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ jeweils paarweise verschieden. Dann gibt es genau eine Möbius-Transformation $w = T(z)$, die die Interpolationsbedingungen

$$w_j = T(z_j) \quad \text{für } j = 1, 2, 3$$

erfüllt.

Die interpolierende Möbius-Transformation $T(z)$ ist gegeben durch die **Dreipunkteformel**

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Doppelverhältnisse und Möbius-Transformationen

Definition

Der Ausdruck

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

heißt das **Doppelverhältnis** der Punkte z_0, z_1, z_2, z_3 .

Doppelverhältnisse und Möbius-Transformationen

Beispiel

Gesucht:

Eine Möbius-Transformation $T(z)$ mit $T(1) = i$, $T(i) = -i$ und $T(0) = 0$.

Nach der Dreipunkteformel bekommt man

$$\frac{w - i}{w + i} : \frac{0 - i}{0 + i} = \frac{z - 1}{z - i} : \frac{0 - 1}{0 - i}$$

und somit (durch Auflösen nach w)

$$w = T(z) = \frac{(1 + i)z}{(1 + i)z - 2i}$$

Übungsaufgabe:

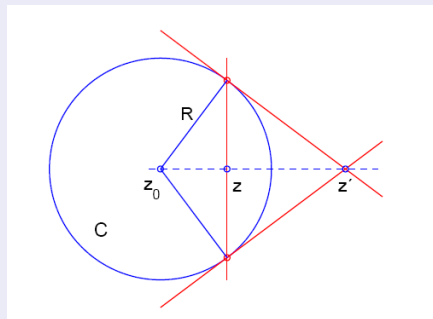
Überprüfe die Gültigkeit der obigen Interpolationsbedingungen an $T(z)$.

Möbius-Transformation

Symmetrie zum Kreis

Liegen die Punkte z und z' wie in der folgenden Abbildung, so sagt man, die Punkte z und z' liegen **symmetrisch zum Kreis**

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}.$$



Die Punkte z und z' liegen symmetrisch zum Kreis C .

Symmetrie zum Kreis - Bemerkungen

- Die Abbildung $z \rightarrow z'$ heißt **Inversion am Kreis** bzw. **Spiegelung am Kreis**.
- Ein Punkt z mit $|z - z_0| \leq R$ ist stets zu einem Punkt z' mit $|z' - z_0| \geq R$ symmetrisch.
- Gilt $|z - z_0| = R$, so ist z zu sich selbst symmetrisch, d.h. $z' = z$.
- Der Punkt $z = z_0$ ist zu $z' = \infty$ symmetrisch.
- Es gilt $(z - z_0)\overline{(z' - z_0)} = R^2$.

Möbius-Transformationen und Kreissymmetrien

Satz

Möbius-Transformationen erhalten Symmetrien zu (verallgemeinerten) Kreisen.

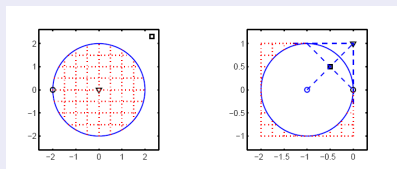
Genauer gilt:

Ist C ein (verallgemeinerter) Kreis in \mathbb{C}^* und liegen z und z' symmetrisch zu C , so liegen die Bilder von z, z' unter einer Möbius-Transformation symmetrisch zu demjenigen (verallgemeinerten) Kreis in \mathbb{C}^* , der das Bild von C darstellt.

Möbius-Transformationen

Beispiel

Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$, die den Kreis $|z| = 2$ auf den Kreis $|w + 1| = 1$ abbildet mit $T(-2) = 0$ und $T(0) = i$.



Möbius-Transformationen

Beispiel (cont.)

Lösung: $z_2 = 0$ und $z_3 = \infty$ liegen symmetrisch zu $|z| = 2$. Daher müssen die Bilder $w_2 = i$ und $w_3 = T(\infty)$ symmetrisch zum Kreis $|w + 1| = 1$ liegen.

Somit gilt $(w_2 + 1)\overline{(w_3 + 1)} = 1$ und damit $w_3 = \frac{1}{2}(-1 + i)$.

Mit der Dreipunkteformel folgt nun

$$\frac{w - 0}{w - i} : \frac{w_3 - 0}{w_3 - i} = \frac{z + 2}{z - 0} : \frac{z_3 + 2}{z_3 - 0} \Bigg|_{z_3 \rightarrow \infty},$$

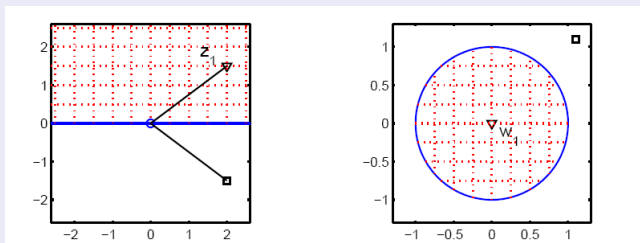
und somit

$$w = T(z) = -\frac{z + 2}{(1 + i)z + 2i}.$$

Möbius-Transformationen

Beispiel

Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$, die die obere Halbebene $\text{Im}(z) > 0$ auf die Kreisscheibe $|w| \leq 1$ abbildet und einen gegebenen Punkt z_1 mit $\text{Im}(z_1) > 0$ auf $w_1 = 0$ abbildet.



Möbius-Transformationen

Beispiel (cont.)

Lösung: Aus Symmetriegründen muss $z_2 = \bar{z}_1$ auf $w_2 = \infty$ abgebildet werden. Daraus folgt

$$w = c \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1} \quad \text{mit } |c| = 1.$$

Möbius-Transformationen

Beispiel

Für $b > a > 0$ betrachten wir die Möbius-Transformation

$$w = T(z) = \frac{z + p}{-z + p} \quad \text{wobei } p = \sqrt{ab} \in (a, b)$$

Für die folgenden Auswertungen von T bekommen wir

$$z_{1,2} = \pm p \quad \rightarrow \quad w_{1,2} = \infty, 0$$

$$z_{3,4} = a, b \quad \rightarrow \quad w_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \pm \varrho \text{ mit } \varrho > 1$$

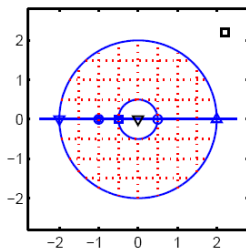
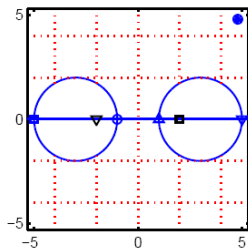
$$z_{5,6} = -a, -b \quad \rightarrow \quad w_{5,6} = \pm \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \pm \frac{1}{\varrho}$$

$$z_{7,8} = 0, \infty \quad \rightarrow \quad w_{7,8} = 1, -1.$$

Möbius-Transformationen

Beispiel (cont.)

- Die x -Achse wird durch T auf die u -Achse abgebildet.
- Punkte, die symmetrisch zur x -Achse liegen, werden auf Punkte abgebildet, die symmetrisch zur u -Achse liegen.
- Kreise, die symmetrisch zur x -Achse liegen, werden auf Kreise abgebildet, die symmetrisch zur u -Achse liegen.



Differenzierbarkeit im Komplexen

Komplexe Differenzierbarkeit

Fragestellungen

- Wie *differenziert* man (sinnvollerweise) komplexe Funktionen?
- Wie definiert man *Grenzwerte* im Komplexen?
- Was bedeutet *Stetigkeit* einer komplexen Funktionen?

Komplexe Differenzierbarkeit

Definition

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Dann heißt $f(z)$ im Punkt $z_0 \in D^0$ **komplex differenzierbar** mit Ableitung $f'(z_0)$, falls der folgende Grenzwert existiert,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Ist $f(z)$ in jedem Punkt einer offenen Menge D komplex differenzierbar, so nennt man $f(z)$ **holomorph**.

Bemerkung

- 1 Der Grenzwertprozess $z \rightarrow z_0$ erfolgt in der komplexen Ebene, d.h. die Richtung der Annäherung $z \rightarrow z_0$ ist **beliebig**.
- 2 Die oben stehende Division ist die Division **komplexer** Zahlen.

Komplexe Differenzierbarkeit

Definition

Ein **Gebiet** ist eine zusammenhängende offene Punktmenge der komplexen Ebene.

Beispiele

Die folgenden Punktfolgen komplexer Zahlen sind Gebiete.

- die komplexe Ebene \mathbb{C} ;
- die aufgeschnittene komplexe Ebene \mathbb{C}^- ;
- die komplexe Ebene ohne die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$;
- die offene Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$;
- ein Kreisring ohne Rand, z.B. $\{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z| < 7\}$.

Aber:

Eine Kreisscheibe mit Rand ist kein Gebiet, eine solche Menge ist nicht offen.

Komplexe Differenzierbarkeit

Lemma

Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertig und $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und ist f holomorph, dann ist f eine konstante Funktion.

Beweis: Wir betrachten zuerst die Folge $z_n \rightarrow z_0$ gegeben durch

$$z_n = z_0 + \frac{1}{n}$$

Dann ist der Differenzenquotient für alle $n \in \mathbb{N}$ reell, denn

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = n(f(z_n) - f(z_0)) \in \mathbb{R}$$

Dagegen liefert die Folge $z_n \rightarrow z_0$ mit $z_n = z_0 + i/n$ den rein imaginären Differenzenquotienten

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{n}{i}(f(z_n) - f(z_0)) \in \mathbb{C}$$

Da aber die Funktion auf Ω holomorph ist, folgt

$$f'(z_0) = 0 \quad \text{für alle } z_0 \in D.$$

Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

Bemerkung

Ist die Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ in z_0 komplex differenzierbar, so folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

bzw. äquivalent dazu

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Sei nun f im Punkt z_0 komplex differenzierbar. Setzen wir

$$\gamma := f'(z_0),$$

so folgt nach obiger Bemerkung die äquivalente Schreibweise

$$f(z) = f(z_0) + \gamma(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|$$

mit $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow z_0$.

Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

Bemerkung (cont.)

Wir verwenden nun mit $z = x + iy$ die **Darstellungen**

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

und

$$\gamma = \alpha + i\beta$$

Damit erhalten wir

$$u(z) = u(z_0) + \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + \operatorname{Re}(\varepsilon(z)) \cdot |z - z_0|$$

$$v(z) = v(z_0) + \beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0) + \operatorname{Im}(\varepsilon(z)) \cdot |z - z_0|$$

In **Matrixschreibweise** lautet dies

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(z_0) \\ v(z_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon(z) \cdot |z - z_0|$$

Die Cauchy–Riemannsches Differentialgleichungen

Wir interpretieren jetzt f als eine vektorwertige, **total differenzierbare** Funktion zweier reeller Variablen, d.h.

mit der **Jacobi–Matrix** $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$J_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Satz:

Die Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist im Punkt $z_0 \in \Omega$ genau dann komplex differenzierbar, wenn f als Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dort total differenzierbar ist und die **Cauchy–Riemannsches Differentialgleichungen** gelten

$$u_x(z_0) = v_y(z_0),$$

$$u_y(z_0) = -v_x(z_0).$$

Darstellung der komplexen Ableitung

Korollar

Ist f komplex differenzierbar in $z_0 \in \Omega$, so folgt

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0).$$

Beweis: Da $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ schreiben wir

$$f'(z_0) = \tilde{u}(z_0) + i\tilde{v}(z_0)$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(z_0) \cdot (z - z_0) &= (\tilde{u}(z_0) + i\tilde{v}(z_0)) \cdot [(x - x_0) + i(y - y_0)] \\ &= \tilde{u} \cdot (x - x_0) - \tilde{v} \cdot (y - y_0) + i(\tilde{v} \cdot (x - x_0) + \tilde{u} \cdot (y - y_0)) \end{aligned}$$

Da f in z_0 total differenzierbar ist und die Cauchy–Riemannschen DGL's erfüllt sind, gilt ebenfalls

$$\begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \cdot (x - x_0) - v_x \cdot (y - y_0) \\ v_x \cdot (x - x_0) + u_x \cdot (y - y_0) \end{pmatrix}$$

Holomorphe Funktionen und die Laplacegleichung

Satz

Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar und holomorph auf Ω , so gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0,$$

d.h. sowohl der Real- als auch der Imaginärteil von f erfüllen die Laplacegleichung.

Beweis: Ist f holomorph, so folgt

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \stackrel{\text{C.R.}}{=} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \\ \Delta v &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \stackrel{\text{C.R.}}{=} -\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$



Holomorphe Funktionen und die Laplacegleichung

Definition

Eine Funktion f , die in einem Gebiet Ω der Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ genügt, nennt man **harmonisch** in Ω .

Umformulierung des vorigen Satzes

Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar und holomorph auf Ω , so sind sowohl der Real- als auch der Imaginärteil von f harmonisch.

Exkurs: Homotopie, einfacher Zusammenhang

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Kurve $c : [a, b] \rightarrow \Omega$ in Ω heißt **geschlossen**, falls $c(a) = c(b)$.

Man nennt zwei geschlossene Kurven c und \tilde{c} **homotop**, falls eine stetige Abbildung $\Phi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ existiert mit

$$\Phi(t, 0) = c(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

$$\Phi(t, 1) = \tilde{c}(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

$$\Phi(a, s) = \Phi(b, s) \quad \text{für alle } s \in [0, 1]$$

Eine geschlossene Kurve c heißt **nullhomotop**, falls sie sich in G stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

Das Gebiet Ω heißt **einfach zusammenhängend**, falls jede geschlossene Kurve in Ω nullhomotop ist.

Holomorphe Funktionen und die Laplacegleichung

Es gilt auch die folgende **Umkehrung**:

Satz

Ist $u = u(x, y)$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω harmonisch, so existiert eine differenzierbare Funktion $v = v(x, y)$, sodass $f(z) = u(z) + iv(z)$ auf Ω holomorph ist.

v nennt man **die zu u konjugiert harmonische Funktion**.

Beweis: Sei $u = u(x, y)$ mit $\Delta u = 0$ gegeben. Gesucht ist eine Funktion $v = v(x, y)$, sodass die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind, also

$$v_x = -u_y \quad v_y = u_x$$

Aus den C.R. DGL's folgt

$$\text{grad } v = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x) =: V = (V_1, V_2)$$

Holomorphe Funktionen und die Laplacegleichung

Beweis (cont.):

Wir suchen also ein Potential v mit $\text{grad } v = V$.

Unter der **Bedingung**

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0$$

ist die Existenz eines solchen Potentials gesichert (siehe Analysis III).

Nun gilt aber

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = -u_{yy} - u_{xx} = -\Delta u = 0.$$



Ableitungsregeln

- Es gelten die folgenden Regeln:

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0),$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

- **Kettenregel:** Ist $f(z)$ differenzierbar in z_0 und $g(w)$ differenzierbar in $w_0 = f(z_0)$, so folgt

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

- **Ableitung der Umkehrfunktion:** Ist $f(z)$ holomorph und $f'(z_0) \neq 0$, so ist $f(z_0)$ um z_0 lokal bijektiv und es gilt

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}, \quad w_0 = f(z_0).$$

Die modifizierte Kettenregel

Lemma

Ist f holomorph auf Ω und ist $c : [a, b] \rightarrow \Omega$ eine stetig differenzierbare Kurve in Ω , so gilt

$$\frac{d}{dt} f(c(t)) = f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t).$$

Beweis: Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(c(t)) &= \frac{d}{dt} u(c(t)) + i \frac{d}{dt} v(c(t)) \\ &= (u_x \dot{c}_1 + u_y \dot{c}_2) + i (v_x \dot{c}_1 + v_y \dot{c}_2). \end{aligned}$$

Daneben haben wir

$$\begin{aligned} f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t) &= (u_x + i v_x) \cdot (\dot{c}_1 + i \dot{c}_2) \\ &= (u_x \dot{c}_1 - v_x \dot{c}_2) + i (v_x \dot{c}_1 + u_x \dot{c}_2). \end{aligned}$$

Beide Terme sind wegen der C.R. DGL's identisch.

Komplexe Differentiation

Beispiel 1

Für $f(z) = z$ erhalten wir wegen $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = y$

$$f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = 1$$

Daraus folgt, dass komplexe Polynome auf \mathbb{C} holomorph sind mit

$$\frac{d}{dz} \left(\sum_{k=0}^n a_k z^k \right) = \sum_{k=1}^n a_k k z^{k-1}.$$

Explizite Berechnung für $f(z) = z^2$: mit

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i 2xy$$

berechnet man

$$f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = 2x + i 2y = 2z.$$

Beispiel 2

Rationale Funktionen, also Funktionen der Form

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad p, q \text{ komplexe Polynome}$$

sind an allen Stellen mit $q(z) \neq 0$ komplex differenzierbar.

Komplexe Differentiation

Beispiel 3

Die Exponentialfunktion $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ ist komplex differenzierbar mit $f'(z) = e^z$, denn mit

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

sind die C.R. DGL's erfüllt

$$u_x = v_y = e^x \cos y, \quad u_y = -v_x = -e^x \sin y,$$

und es gilt

$$f'(z) = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z.$$

Komplexe Differentiation

Beispiel 4

Die trigonometrischen Funktionen

$$\sin z := \frac{1}{2i} \left(e^{iz} - e^{-iz} \right), \quad \cos z := \frac{1}{2} \left(e^{iz} + e^{-iz} \right)$$

sind nach Beispiel 3 holomorph auf \mathbb{C} und es gelten den reellen Funktionen analoge Formeln.

Beispiel 5

Durch komplexe Potenzreihen erklärte Funktionen,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

sind auf ihrem Konvergenzbereich $K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ holomorph mit

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$$

und damit auf $K_r(z_0)$ gleichzeitig **beliebig oft** komplex differenzierbar.

Komplexe Differentiation

Beispiel 6

Betrachte $f(z) = z^2$ auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Dort ist f injektiv mit Wertebereich \mathbb{C}^a . Die Umkehrfunktion $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$ ist der Hauptwert der Wurzelfunktion, und es gilt

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^a.$$

Beispiel 7

Betrachte $f(z) = \exp(z)$ auf dem Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$. Dort ist f injektiv mit Wertebereich \mathbb{C}^a . Die Umkehrfunktion $f^{-1}(z) = \operatorname{Log}(z)$ ist der Hauptwert des Logarithmus, und es gilt

$$(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{e^{\operatorname{Log}(z)}} = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

Beispiel 8

Für $f(z) = z^a$, den Hauptwert von $[z^a]$, $z \in \mathbb{C}^a$ und $a \in \mathbb{C}$ fest, gilt

$$(z^a)' = az^{a-1} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

Konforme Abbildungen

Satz (und Definition)

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$. Dann gilt lokal an einem Punkt $z_0 \in \Omega$:

- a) **Winkel** zwischen sich im Punkt z_0 schneidender Kurven bleiben bei der Transformation $w = f(z)$, einschließlich des Umlaufsinnns, erhalten,
- b) der Term $|f'(z_0)|$ ist die für alle von z_0 ausgehenden Richtungen gemeinsame **Längenverzerrung**. Insbesondere bleiben Längenverhältnisse erhalten.

Abbildungen mit diesen beiden Eigenschaften nennt man **konforme Abbildungen**.

Konforme Abbildungen

Beweis:

Seien c und d zwei Kurven, die für $t = 0$ durch den Punkt z_0 laufen. Die beiden Tangentialvektoren in diesem Punkt sind dann $\dot{c}(0)$ und $\dot{d}(0)$ und für den Winkel γ zwischen den Tangentialvektoren gilt

$$\gamma = \angle (\dot{c}(0), \dot{d}(0)) = \arg (\dot{d}(0)) - \arg (\dot{c}(0))$$

Mittels f erhalten wir die beiden Kurven $f \circ c$ und $f \circ d$ im Bildraum. Der Winkel $\tilde{\gamma}$ zwischen den beiden Kurven im Punkt $f(z_0)$ im Bildraum lautet

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \angle (f'(z_0)\dot{c}(0), f'(z_0)\dot{d}(0)) \\ &= \arg (f'(z_0)\dot{d}(0)) - \arg (f'(z_0)\dot{c}(0)) \\ &= \arg (f'(z_0)) + \arg (\dot{d}(0)) - \arg (f'(z_0)) - \arg (\dot{c}(0)) = \gamma\end{aligned}$$

und bezüglich der Längenverzerrung berechnet man

$$\left| \frac{d}{dt} (f \circ c) \right| = |f'(z_0)\dot{c}(0)| = |f'(z_0)| \cdot |\dot{c}(0)|$$

Konforme Abbildungen

Für konforme Abbildungen gilt die folgende **Umkehrung** des Satzes (hier ohne Beweis).

Satz

Ist $w = f(z)$ eine konforme Abbildung und als Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so ist $f(z)$ komplex differenzierbar und es gilt $f'(z) \neq 0$.

Ebene Potentialprobleme

Konforme Transformation von Potentialen

Ziel: Lösung ebener Potentialprobleme mit *konformen* Abbildungen f .

Methode: Konstruktion von *konformen* Transformationen.

Ausgangssituation

- Sei $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ holomorph, bijektiv, und *konform*, für Gebiete $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$.
- Somit gibt es eine Umkehrabbildung $f^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ mit
$$z = f^{-1}(w) \quad \text{für } w = f(z), \quad \text{wobei } z = x+iy \in \Omega, w = u+iv \in \Omega'.$$
- Weiterhin sei in Ω eine **reellwertige** zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$\Phi : (x, y) \rightarrow \Phi(x, y) = \Phi(z) \in \mathbb{R} \quad \text{für } z \in \Omega$$

definiert.

Konforme Transformation von Potentialen

Dann gibt es eine Abbildung

$$\Psi := \Phi(f^{-1}) : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$$

bzw.

$$\Psi : (u, v) \rightarrow \Psi(u, v) = \Psi(w) := \Phi(f^{-1}(w)) \in \mathbb{R} \quad \text{für } w \in \Omega'$$

Definition

Die obige Konstruktion von Ψ nennt man **konforme Transformation** von Φ mit der Abbildung f .

Physikalische Anwendungen

Im folgenden sind Φ und Ψ **Potentiale**, z.B.

- elektrostatische Potentiale;
- Strömungspotentiale;
- Temperaturfelder etc.

Dabei sind die Vektoren (Φ_x, Φ_y) und (Ψ_u, Ψ_v) von bes. Interesse.

Komplexe Gradienten

Definition

Unter dem **komplexen Gradienten** $\text{grad}(\Phi)$ von Φ verstehen wir die Funktion

$$\text{grad}((\Phi)(x, y)) = \Phi_x(x, y) + i\Phi_y(x, y)$$

Bemerkungen

- Der komplexe Gradient fasst den *üblichen* Gradienten als komplexe Zahl auf.
- Entsprechend ist der komplexe Gradient $\text{grad}(\Psi)$ von Ψ gegeben durch

$$\text{grad}((\Psi)(u, v)) = \Psi_u(u, v) + i\Psi_v(u, v).$$

Frage

Wie verhalten sich komplexe Gradienten bei konformen Transformationen?

Transformationen von komplexen Gradienten

Ausgangspunkt

Sei $\Phi(x, y) = \Psi(u(x, y), v(x, y))$ mit

$$u(x, y) = u(z) \quad v(x, y) = v(z) \quad u(z) + iv(z) = f(z).$$

Dann gilt (nach Kettenregel)

$$\Phi_x = \Psi_u(u(x, y), v(x, y))u_x(x, y) + \Psi_v(u(x, y), v(x, y))v_x(x, y),$$

$$\Phi_y = \Psi_u(u(x, y), v(x, y))u_y(x, y) + \Psi_v(u(x, y), v(x, y))v_y(x, y)$$

und somit

$$\text{grad}(\Phi) = \Phi_x + i\Phi_y = \Psi_u(u_x + iu_y) + \Psi_v(v_x + iv_y),$$

bzw. mit Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$,
 $u_y = -v_x$ gilt

$$\text{grad}(\Phi) = (\Psi_u + i\Psi_v)(u_x - iv_x) = \text{grad}(\Psi) \cdot (u_x - iv_x).$$

Transformationen von komplexen Gradienten

Erinnerung

Es gilt

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) \quad \text{und} \quad \overline{f'(z)} = u_x(z) - iv_x(z).$$

Erster Transformationssatz

Satz (als Folgerung der vorherigen Rechnung)

Geht Ψ durch Transformation mit der holomorphen Abbildung f aus Φ hervor, so gilt

$$\text{grad}(\Phi)(z) = \text{grad}(\Psi)(w) \cdot \overline{f'(z)},$$

wobei $w = f(z)$.

Bemerkung

Bei vielen Potentialproblemen ist folgende Größe bekannt:

$$\Delta\Phi = \Delta_z\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy}.$$

Frage

Nehme zusätzlich an, dass f zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Wie verhält sich die Transformation Ψ unter dem Laplace-Operator Δ ? D.h. welche Werte ergibt sich für

$$\Delta\Psi = \Delta_w\Psi = \Psi_{uu} + \Psi_{vv} \quad ?$$

Anwendung des Laplace-Operators

Mit erneuter Anwendung der Kettenregel gilt

$$\Phi_{xx} = \Psi_{uu}(u_x)^2 + 2\Psi_{uv}u_xv_x + \Psi_{vv}(v_x)^2 + \Psi_u u_{xx} + \Psi_v v_{xx},$$

$$\Phi_{yy} = \Psi_{uu}(u_y)^2 + 2\Psi_{uv}u_yv_y + \Psi_{vv}(v_y)^2 + \Psi_u u_{yy} + \Psi_v v_{yy}.$$

Insgesamt folgt durch Addition

$$\begin{aligned}\Delta_z \Phi &= \Psi_{uu} \left[(u_x)^2 + (u_y)^2 \right] + 2\Psi_{uv} [u_x v_x + u_y v_y] \\ &\quad + \Psi_{vv} \left[(v_x)^2 + (v_y)^2 \right] + \Psi_u \Delta_z u + \Psi_v \Delta_z v.\end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, $u_x = v_y$,
 $u_y = -v_x$, liefern

$$\Delta_z \Phi = (\Psi_{uu} + \Psi_{vv})|f'(z)|^2 + \Psi_u \Delta_z u + \Psi_v \Delta_z v,$$

wobei $|f'(z)|^2 = (u_x(z))^2 + (v_x(z))^2$ verwendet wurde.

Zweiter Transformationsatz

Satz

Geht Ψ aus Φ durch konforme Transformation mit der zweimal stetig partiell differenzierbaren Abbildung f hervor, so gilt

$$\Delta_z \Phi = \Delta_w \Psi \cdot |f'(z)|^2,$$

wobei $w = f(z)$.

Beweis: Es gilt

$$\Delta_z \Phi = (\Psi_{uu} + \Psi_{vv})|f'(z)|^2 + \Psi_u \Delta_z u + \Psi_v \Delta_z v.$$

Wegen

$$\Delta_z u = \Delta_z v = 0$$

gilt somit die Behauptung. □

Harmonische Funktionen

Folgerung

Genügt Φ der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$, so folgt $\Delta\Psi = 0$.

Beweis: Mit der Konformität von f folgt $f'(z) \neq 0$. Daraus bekommt man die Behauptung direkt mit der Identität $\Delta_z\Phi = \Delta_w\Psi \cdot |f'(z)|^2$. \square

Somit können wir die obige Folgerung entsprechend umformulieren.

Folgerung

Bei konformer Transformation gehen harmonische Funktionen in harmonische Funktionen über.

Bemerkungen

- Wie bereits mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gezeigt, sind die Real- und Imaginärteile holomorpher zweimal stetig partiell differenzierbarer Funktionen harmonisch.
- Es gilt die folgende Umkehrung des vorigen Satzes (bereits gezeigt): Ist $u \equiv u(x, y)$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω harmonisch, so gibt es eine Funktion $v \equiv v(x, y)$, so dass die Abbildung $f = u + iv$ auf Ω holomorph ist.
 v nennt man **die zu u konjugiert harmonische Funktion**.

Skizze zur Lösung ebener Potentialprobleme

Hilfsmittel: Transformationssätze.

Vorgehensweise: Konforme Transformation

- **Gegeben:**

Potentialproblem in der z -Ebene, der **physikalischen Ebene**.

- **Transformation:**

Transformiere das Problem konform in die w -Ebene, die **Modellebene**.

- **Vereinfachung:**

Löse das Problem (**leicht?**) in der Modellebene.

- **Lösung:**

Rücktransformation in z -Ebene liefert Lösung in der physikalischen Ebene.

Temperaturverteilung in homogenem Zylinder

Gegeben

ein homogener Zylinder senkrecht zur z -Ebene mit beliebigem Querschnitt Q .

- Die Oberflächentemperatur des Zylinders sei *zeitunabhängig*.
- Die Oberflächentemperatur sei *konstant* bei konstantem z .

Frage

Am Rand werde die Temperatur $\Phi_0(z)$, $z \in \Gamma$, gemessen. Wie sieht die Temperaturverteilung im Inneren des Zylinders aus?

Modellierung

Die Temperatur Φ genügt nach der Wärmeleitungsgleichung der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ in Ω .

Zusätzlich gelten die **Dirichlet-Randbedingungen**

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) \quad \text{für alle } z \in \Gamma.$$

Temperaturverteilung in homogenem Zylinder

Mathematische Aufgabenstellung

Löse das **Dirichlet-Problem**.

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \Phi(z) &= \Phi_0(z) && \text{für alle } z \in \Gamma.\end{aligned}$$

Annahme

Das Problem **gut gestellt**, d.h. es gibt eine eindeutige Lösung.

Vereinfachung des Dirichlet-Problems

Ziel

Bilde das Gebiet Ω injektiv und konform auf den Einheitskreis ab.

Bemerkung

Unter geeigneten Bedingungen ist dies mit einer holomorphen Funktion f möglich, so dass

$$\Psi(w) = \Phi(f^{-1}(w)) \quad \text{für } |w| \leq 1$$

die *transformierte* Temperatur liefert.

Im Inneren des Einheitskreises erfüllt Ψ somit die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{für } |w| < 1.$$

Weiterhin nimmt Ψ auf dem Kreisrand die transformierten Randwerte an:

$$\Psi(e^{i\theta}) = \Psi_0(e^{i\theta}) = \Phi_0(f^{-1}(e^{i\theta})) \quad \text{für } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Einfachere Aufgabe

Löse das Dirichlet-Problem für Ψ auf dem Einheitskreis.

Lösung des einfacheren Dirichlet-Problems

Voraussetzung

Sei Ψ_0 hinreichend **glatt**, und durch

$$\Psi_0(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt, mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_0(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Dann kann man die Lösung des Dirichlet-Problems direkt angeben:

$$\Psi(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^{|n|} e^{in\theta} \quad \text{für } w = \rho e^{i\theta} \text{ mit } 0 \leq \rho \leq 1.$$

Rücktransformation

Die Lösung des ursprünglichen Problems ist somit

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n |f(z)|^{|n|} e^{in\phi} \quad \text{mit } \phi = \arg(f(z)).$$

Ebene stationäre Strömungen von Flüssigkeiten

Betrachte

Zeitunabhängige ebene Strömungen von **idealen** (d.h. reibungsfeien) und **inkompressiblen** Flüssigkeiten; die Strömungen seien **quellenfrei** und **wirbelfrei**; dabei bezeichne

$$\mathbf{q}(x, y) = (q_1(x, y), q_2(x, y))$$

den Geschwindigkeitsvektor der Strömungen im Punkt (x, y) .

Quellenfreiheit bedeutet

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}) = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0.$$

Wirbelfreiheit bedeutet

$$\operatorname{rot}(\mathbf{q}) = \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0.$$

Zur Existenz von Potentialströmungen

Analysis III: Mit der Wirbelfreiheit $\operatorname{rot}(\mathbf{q}) = 0$ ist \mathbf{q} ein **Gradientenfeld**.
D.h., es gibt eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{q} = \operatorname{grad}(\Phi)$$

bzw.

$$q_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Definition

Die Funktion Φ mit $\mathbf{q} = \operatorname{grad}(\Phi)$ heißt **Potentialströmung** bzw. das **Geschwindigkeitspotential** der Strömung.

Erinnerung

Eine Potentialströmung ist stets wirbelfrei, denn $\operatorname{rot}(\mathbf{q}) = 0$ folgt unmittelbar aus $\mathbf{q} = \operatorname{grad}(\Phi)$.

Zur Quellenfreiheit von wirbelfreien Potentialen

Beobachtung

Verwendet man die Bedingung (an die Wirbelfreiheit von \mathbf{q})

$$q_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

so gilt für die Quellenfreiheit, $\operatorname{div}(\mathbf{q}) = 0$, die Bedingung

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Zur Quellenfreiheit von wirbelfreien Potentialen

Zusammenfassung

Das Geschwindigkeitspotential Φ einer quellen- und wirbelfreien Strömung einer idealen kompressiblen Flüssigkeit ist harmonisch, d.h. es gilt

$$\Delta\Phi = 0.$$

Umkehrung

Jede harmonische Funktion Φ , $\Delta\Phi = 0$, lässt sich als Geschwindigkeitspotential einer quellen- und wirbelfreien Strömung interpretieren.

Neumannsches Randwertproblem

Voraussetzungen

- Sei Γ der Rand des durchströmten Gebiets Ω (begrenzende Wand);
- die Strömung verläuft dann tangential zum Rand Γ , d.h.
- der Geschwindigkeitsvektor $\text{grad}(\Phi)$ ist der Tangentenvektor von Γ ;
- dann verschwindet die **Normalenableitung** von Φ längs Γ .
- Dies führt insgesamt zu dem **Neumannschen Randwertproblem**

$$\begin{aligned}\Delta(\Phi) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} &= 0,\end{aligned}$$

das mit der Methode der konformen Transformation gelöst werden kann.

- Im folgenden entwickeln wir diesen Lösungsweg.

Lösung des Neumannschen Randwertproblems

- Bilde Ω bijektiv und konform mit $f : \Omega \rightarrow \Omega^*$ auf *einfacheres* Gebiet Ω^* ab;

- Transformiere das Potential Φ von Ω nach Ω^* , womit

$$\Psi(w) = \Phi(f^{-1}(w)) \quad \text{für alle } w \in \Omega^*.$$

- Nach dem zweiten Transformationssatz ist Ψ harmonisch, d.h. es gilt

$$\Delta \Psi = 0.$$

- Falls f sogar auf dem Rand Γ von Ω konform ist, so gilt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n^*} = 0$$

für die Normalenableitung des Randes Γ^* von Ω^* .

- Löse nun das *einfachere* Neumannsche Randwertproblem

$$\Delta \Psi = 0 \text{ in } \Omega^* \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n^*} = 0 \text{ auf } \Gamma^*$$

- Die Lösung in Ω bekommt man durch Rücktransformation.

Strömung durch einen Kanal variabler Breite

- **Physikalische Ebene:** ein Kanal Ω variabler Breite;
- **Modellebene:** ein gerader Kanal Ω^* ;
- Wirbelfreie Strömungen im geraden Kanal sind homogen mit Potential

$$\Psi(w) = V \operatorname{Re}(w)$$

wobei V der Betrag des (konstanten) Geschwindigkeitsvektors ist, der die Geschwindigkeit liefert.

Aufgabe

Bilde physikalischen Kanal inklusive Rand konform auf den geraden Kanal ab.

- Löse die Neumannsche Randwertaufgabe im geraden Kanal;
- Erhalte die Lösung im physikalischen Kanal durch Rücktransformation.

Umströmung eines Hindernisses

Voraussetzungen für die physikalische Ebene

- homogene Strömung mit Geschwindigkeit V in Richtung der reellen Achse;
- umströmt werde ein zylindrisches Hindernis mit beschränktem Querschnitt;

Frage

Wie sieht das Strömungsbild der gestörten Strömung aus?

Beachte

die Strömung bleibt im Unendlichen ungestört und somit gilt

$$\text{grad}(\Phi(z)) \rightarrow V \quad \text{für } z \rightarrow \infty$$

für den Geschwindigkeitsvektor, kurz $\text{grad}(\Phi(\infty)) = V$.

Umströmung eines Hindernisses

Vereinfachte Modellebene

- Ist das Hindernis eine unendlich dünne Platte parallel zur reellen Achse, so wird die Strömung nicht gestört.
- In diesem Fall ist das Potential gegeben durch $\Psi(w) = V \operatorname{Re}(w)$.

Problem

Bilde das in der physikalischen Ebene durchströmte Gebiet auf aufgeschnittene Ebene $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ ab mit holomorpher Funktion f , wobei

$$f(\infty) = \infty \quad \text{und} \quad f'(\infty) = 1.$$

Dann gilt mit dem ersten Transformationssatz

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\Phi(z)) &= \operatorname{grad}(\Psi(w)) \cdot \overline{f'(z)} \\ \operatorname{grad}(\Phi(\infty)) &= \operatorname{grad}(\Psi(\infty)) \quad \text{für } z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

so dass wir in der physikalischen Ebene und in der Modellebene dieselbe homogene Strömung im Unendlichen bekommen.

Umströmung des Einheitskreiszyinders

- Mit der gestreckten **Joukowski-Funktion**

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \quad \text{für } |z| > 1$$

geht das Äußere des Einheitskreises über in die aufgeschnittene Ebene

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0 \text{ und } \text{Re}(z) \in [-2, 2]\}$$

- dabei gilt $f(\infty) = \infty$ und $f'(\infty) = 1$.
- für das Potential in der physikalischen Ebene bekommt man somit

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = V \operatorname{Re} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

bzw.

$$\Phi(x, y) = V \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Umströmung des Einheitskreiszyinders

- Mit $\text{grad}(\Psi(w)) \equiv V$ und $f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$ erhalten wir

$$q(z) = \text{grad}(\Phi(z)) = \text{grad}(\Psi(f(z))) \cdot \overline{f'(z)} = V \left(1 - \frac{1}{\overline{z^2}} \right)$$

für den Geschwindigkeitsvektor bzw. in Polarkoordinaten

$$q(re^{i\phi}) = V \left(1 - \frac{1}{r^2} e^{2i\phi} \right)$$

- Speziell an der Zylinderoberfläche bekommen wir das Geschwindigkeitsfeld

$$q(e^{i\phi}) = V(1 - e^{2i\phi})$$

mit Geschwindigkeit

$$|q(e^{i\phi})| = V|1 - e^{2i\phi}| = 2V|\sin(\phi)|$$

- Für $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ ist die Geschwindigkeit Null (**Staupunkte**);
- Für $\phi = \pm\pi/2$ ist die Geschwindigkeit maximal, nämlich $2V$.

Komplexe Integration

Komplexe Integration

Definition

Eine komplexwertige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ einer reellen Variablen ist **integrierbar**, falls der Real- und Imaginärteil von f integrierbar sind, und es gilt

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt = \operatorname{Re} e^{i\varphi}.$$

Komplexe Integration

Es gelten zu dem Reellen analoge Eigenschaften, wie zum Beispiel **Linearität**. Weiter gilt stets

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Beweis: Man berechnet

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= R = e^{-i\varphi} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{-i\varphi} f(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\varphi} f(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\varphi} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

□

Komplexe Integration analog zu Kurvenintegralen

Reelle Analysis

Sei $c : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir hatten in Analysis II und III die beiden Kurvenintegrale

$$\int_c f(\mathbf{x}) ds := \int_a^b f(c(t)) \|\dot{c}\| dt$$

bzw.

$$\int_c \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_a^b \mathbf{F}(c(t)) \cdot \dot{c}(t) dt.$$

Definition

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $c : [a, b] \rightarrow D$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann ist

$$\int_c f(z) dz := \int_a^b f(c(t)) \dot{c}(t) dt$$

das **komplexe Integral** von $f(z)$ längs der Kurve c .

Komplexe Kurvenintegralen

Eigenschaften des komplexen Integrals

- Der Wert des komplexen Integrals ist **unabhängig** von der Parametrisierung der Kurve.
- Bei Änderung der **Durchlaufrichtung** gilt

$$\int_{-c} f(z) dz = - \int_c f(z) dz$$

Hier ist $(-c)(t) := c(b + t(a - b))$, $0 \leq t \leq 1$.

- **Linearität**

$$\int_c (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_c f(z) dz + \beta \int_c g(z) dz \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

- **Additivität** bzgl. des Integrationsweges:

$$\int_{c_1+c_2} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz$$

Komplexe Kurvenintegralen

Weitere Eigenschaft des komplexen Integrals

Es gilt die Abschätzung

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \text{Bild}(c)} |f(z)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\dot{c}(t)| dt}_{\text{Bogenlänge } L(c)} .$$

Beweis:

Man berechnet direkt

$$\begin{aligned} \left| \int_c f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(c(t)) \dot{c}(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(c(t))| |\dot{c}(t)| dt \\ &\leq \sup_{a \leq t \leq b} |f(c(t))| \cdot \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \end{aligned}$$

Ein Beispiel für komplexe Integrale

Beispiel 1

Sei $f(z) = z$ und $c(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\oint_c z \, dz &= \int_0^{2\pi} re^{it} \cdot (rie^{it}) \, dt \\ &= ir^2 \int_0^{2\pi} e^{2it} \, dt \\ &= ir^2 \int_0^{2\pi} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \, dt \\ &= -r^2 \int_0^{2\pi} \sin(2t) \, dt + ir^2 \int_0^{2\pi} \cos(2t) \, dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

Beispiele für komplexe Integrale

Beispiel 2

Sei $f(z) = \bar{z}$ und $c(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$\oint_c \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} re^{-it} \cdot (rie^{it}) dt = ir^2 \int_0^{2\pi} dt = r^2 \cdot 2\pi i.$$

Beispiel 3

Sei $f(z) = 1/z$ und $c(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$\oint_c \frac{1}{z} dz = \oint_c \frac{\bar{z}}{|z|^2} dz = \frac{1}{r^2} \oint_c \bar{z} dz = 2\pi i.$$

Beispiele für komplexe Integrale

Beispiel 4

Es gilt mit $c(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ die Beziehung

$$\oint_c (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & : \text{für } n = -1, \\ 0 & : \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}. \end{cases}$$

Beispiele für komplexe Integrale

Beispiel 4 (cont.)

$$\begin{aligned}\oint_C (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \cdot (rie^{it}) dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= r^{n+1} \left(- \int_0^{2\pi} \sin((n+1)t) dt + i \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) dt \right) \\ &= \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1, \\ 0 & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}. \end{cases}\end{aligned}$$

Nur für $n = -1$ verschwindet das Integral nicht und es gilt

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i.$$

Frage: Woran liegt das?

Gleichmäßige Konvergenz bei komplexen Integralen

Satz

Ist $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ eine Reihe stetiger Funktionen, die auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ **gleichmäßig konvergiert**, und ist $c : [a, b] \rightarrow \Omega$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, so gilt

$$\int_c f(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_c f_k(z) dz.$$

Beweis: Da die Reihe stetiger Funktionen gleichmäßig konvergiert, ist auch die Grenzfunktion $f(z)$ stetig und daher auch integrierbar und

$$\int_c f(z) dz - \sum_{k=0}^n \int_c f_k(z) dz = \int_c R_n(z) dz.$$

Gleichmäßige Konvergenz bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N, z \in \Omega : |R_n(z)| < \varepsilon.$$

Gleichmäßige Konvergenz bei komplexen Integralen

Beweis (cont.): Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt sofort

$$\left| \int_c R_n(z) dz \right| \leq \varepsilon \cdot L(c)$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c R_n(z) dz = 0.$$

□

Beispiel

Sei

$$c(t) = re^{it} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 2\pi$$

und $|z_0| > r$. Dann gilt:

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z - z_0} = 0.$$

Beachte: Der Punkt z_0 liegt außerhalb des Kreises $c(t)$.

Gleichmäßige Konvergenz bei komplexen Integralen

Fortsetzung des letzten Beispiels

Man berechnet direkt unter Verwendung der geometrischen Reihe

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{1 - \frac{z}{z_0}} = -\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k} z^k dz,$$

denn es gilt

$$\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1.$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k} z^k dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{k+1}} \oint_{|z|=r} z^k dz = 0,$$

da man Integration und Summation vertauschen kann.

Vorgriff auf die Laurent-Reihe

Beispiel

Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{\text{analog zur Taylor-Reihe}} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k}_{\text{negative Potenzen}}$$

nennt man eine **Laurent-Reihe**.

Sie konvergiert lokal gleichmäßig und absolut in einem **Kreisring**

$$0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2.$$

Für $R_1 < r < R_2$ und $c(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ gilt daher

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^k dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Der Cauchysche Hauptsatz

Wir hatten im Abschnitt 5.1 mit der Kurve $c(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ die Aussage

$$\oint_c (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & : \text{für } n = -1, \\ 0 & : \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}. \end{cases}$$

Frage:

Wann verschwindet das Integral über geschlossene Kurven?

Satz: (Cauchyscher Integralsatz)

Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein **einfach zusammenhängendes** Gebiet, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine **holomorphe** Funktion und $c : [a, b] \rightarrow \Omega$ eine **geschlossene** stückweise stetig differenzierbare Kurve, so gilt stets

$$\oint_c f(z) dz = 0.$$

Der Cauchysche Hauptsatz

Bemerkung zum Cauchyschen Integralsatz

Alle drei Voraussetzungen werden gebraucht!

- ① Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist **nicht** holomorph und es gilt

$$\oint_{|z|=1} \bar{z} dz \neq 0.$$

- ② Das Gebiet $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ ist **nicht** einfach zusammenhängend und es gilt

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz \neq 0.$$

- ③ Die Kurve $c(t) = e^{(1+i)t}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$ ist **nicht** geschlossen und es gilt

$$\int_c z dz \neq 0.$$

Beweis des Cauchyschen Integralsatzes

Beweis:

Wir setzen $c(t) = (x(t), y(t))$ und $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$:

$$\begin{aligned}\oint_c f(z) dz &= \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y}) dt + i \int_a^b (u\dot{y} + v\dot{x}) dt \\ &= \oint_c \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} d\mathbf{x} + i \oint_c \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Bei beiden Vektorfelder $(u, -v)$ und (v, u) gilt wegen der C.R. DGL's:

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = u_y + v_x = 0, \quad \operatorname{rot} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = v_y - u_x = 0.$$

Daher existiert ein **Potential** und beide Integrale sind wegen der **geschlossenen Kurve** c identisch gleich Null. □

Die Stammfunktion einer holomorphen Funktion

Korollar

Ist das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f(z)$ holomorph auf Ω und $c_1, c_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$, so folgt aus $c_1(a) = c_2(a)$ und $c_1(b) = c_2(b)$ direkt

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_{c_2} f(z) dz$$

d.h. das Integral $\int_c f(z) dz$ ist **wegunabhängig**.

Berechnung komplexer Integrale mittels Stammfunktion

Satz

Sei f auf einem Gebiet Ω stetig und sei $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine **Stammfunktion** von f , also $F' = f$. Dann gilt für alle stückweise stetig differenzierbare Kurven $c : [a, b] \rightarrow G$

$$\int_c f(z) dz = F(c(b)) - F(c(a)).$$

Insbesondere ist das Wegintegral wegunabhängig.

Beweis:

Durch Substitution ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_c f(z) &= \int_a^b f(c(t)) \dot{c}(t) dt = \int_a^b F'(c(t)) \dot{c}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (F(c(t))) dt = F(c(b)) - F(c(a)) \end{aligned}$$

Die Stammfunktion einer holomorphen Funktion

Die Umkehrung des vorigen Satzes ist noch interessanter!

Satz: (Existenz einer Stammfunktion)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit wegunabhängigem Integral

$$\int_c f(z) dz.$$

Für einen festen Punkt $z_0 \in \Omega$, setze für $z \in \Omega$

$$F(z) := \int_{c_z} f(\xi) d\xi$$

mit einer beliebigen stückweise stetig differenzierbare Kurve, die z_0 und z verbindet.

Dann ist $F(z)$ eine **Stammfunktion** von $f(z)$, d.h. es gilt

$$F'(z) = f(z).$$

Beweis des letzten Satzes

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi = \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)h dt \\ &= \int_0^1 f(z+th) dt.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \int_0^1 (f(z+th) - f(z)) dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} |f(z+th) - f(z)| \rightarrow 0\end{aligned}$$

für $h \rightarrow 0$.



Die Stammfunktion einer holomorphen Funktion

Satz: (Existenz einer Stammfunktion)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f(z)$ holomorph auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω , $z_0 \in \Omega$ ein fester Punkt und setze für $z \in \Omega$

$$F(z) := \int_{c_z} f(\xi) d\xi$$

mit einer beliebigen stückweise stetig differenzierbare Kurve, die z_0 und z verbindet.

Dann ist $F(z)$ eine **Stammfunktion** von $f(z)$, d.h. es gilt

$$F'(z) = f(z).$$

Berechnung komplexer Integrale mittels Stammfunktion

Beispiel

Wir betrachten mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ das Integral

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{dz}{z^2}$$

Die Funktion $f(z) = 1/z^2$ ist **holomorph** auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet

$$\Omega = \mathbb{C}^a = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\},$$

also die komplexe Ebene ohne die negative reelle Achse.

Insbesondere ist das obenstehende Integral **wegunabhängig**.

Berechnung komplexer Integrale mittels Stammfunktion

Fortsetzung des Beispiels

Direkte Integration: Wir setzen den Integrationsweg

$$c(t) = a + it, \quad \text{für } -b \leq t \leq b$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_c \frac{dz}{z^2} &= \int_{-b}^b \frac{i}{(a+it)^2} dt = - \frac{1}{a+it} \Big|_{-b}^b \\ &= \frac{1}{a-ib} - \frac{1}{a+ib} = \frac{2ib}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite berechnet man mit Hilfe der **Stammfunktion**

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{dz}{z^2} = \left(-\frac{1}{z} \right) \Big|_{a-ib}^{a+ib} = \frac{2ib}{a^2+b^2}.$$

Homotope Kurven

Definition (nochmal)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $c, \tilde{c} : [a, b] \rightarrow G$ zwei geschlossene Kurven in Ω . Man nennt c und \tilde{c} **homotop**, falls eine stetige Abbildung $\Phi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$ existiert mit

$$\begin{aligned}\Phi(t, 0) &= c(t) && \text{für alle } t \in [a, b], \\ \Phi(t, 1) &= \tilde{c}(t) && \text{für alle } t \in [a, b], \\ \Phi(a, s) &= \Phi(b, s) && \text{für alle } s \in [0, 1].\end{aligned}$$

Eine geschlossene Kurve c heißt **nullhomotop**, falls sie sich in G stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

Damit folgt aus dem **Cauchyschen Integralsatz**:

Sei $f(z)$ holomorph auf einem Gebiet Ω . Dann gilt für zwei geschlossene Wege c und \tilde{c} :

$$c, \tilde{c} \text{ homotop} \quad \Rightarrow \quad \oint_c f(z) dz = \oint_{\tilde{c}} f(z) dz.$$

Beispiel und Definition der Umlaufzahl

Beispiel

Für jede einfach geschlossene Kurve c , die den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ (einmal) im positiven Sinn umläuft, gilt

$$\oint_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Denn $c(t)$ ist homotop zu $\tilde{c}(t) = z_0 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Definition

Für eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ heißt

$$\text{Uml}(c, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{dz}{z - z_0}$$

die **Umlaufzahl** von c bezüglich des Punktes z_0 .

Die Umlaufzahl ist stets eine ganze Zahl und gibt an, wie oft der Weg c den Punkt z_0 in mathematisch positivem Sinne umläuft.

Die Cauchysche Integralformel, Taylor-Entwicklung

Satz (Cauchysche Integralformel)

Sei $f(z)$ holomorph auf einem Gebiet Ω , $z_0 \in \Omega$ und $c : [a, b] \rightarrow \Omega \setminus \{z_0\}$ ein zum Punkt z_0 homotoper Weg, der z_0 im positiven Sinn einmal umläuft. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Beweis:

Der Weg c läßt sich innerhalb von $\Omega \setminus \{z_0\}$ auf einen Kreis $K_r(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ zusammenziehen. Daher gilt

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt.$$

Fortsetzung des Beweises

Daher gilt

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_{K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.\end{aligned}$$

Im Grenzfall $r \rightarrow 0$ erhalten wir offensichtlich die Beziehung

$$i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \longrightarrow 2\pi if(z_0).$$

Da das Integral $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ aber unabhängig von r ist, folgt

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi if(z_0).$$



Bemerkungen zur Cauchyschen Integralformel

- Für einen beliebigen z_0 -homotopen Weg in $\Omega \setminus \{z_0\}$, der den Punkt z_0 nicht notwendigerweise genau einmal durchläuft, gilt entsprechend

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot \text{Uml}(c, z_0) \cdot f(z_0).$$

- Nützlich ist folgende **heuristische Herleitung**: aus der Taylor-Formel

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

folgt

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z_0)}{z - z_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-1}.$$

Formal erhalten wir damit

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_c \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \oint_c \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-1} dz}_{=0} = 2\pi i \cdot f(z_0).$$

Ein Beispiel zur Cauchyschen Integralformel

Zu berechnen sei das Integral

$$\oint_c \frac{1}{1+z^2} dz,$$

wobei c die Achterkurve bezeichnet, die den Punkt $z_1 = i$ einmal im positiven Sinn, den Punkt $z_2 = -i$ einmal im negativen Sinn umläuft.

- 1 Berechnung mittels **Partialbruchzerlegung**

$$\begin{aligned} \oint_c \frac{1}{1+z^2} dz &= \oint_c \frac{1}{(z+i)(z-i)} dz = \frac{i}{2} \oint_c \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right) dz \\ &= \frac{i}{2} \oint_c \frac{dz}{z+i} - \frac{i}{2} \oint_c \frac{dz}{z-i} = \frac{i}{2}(-2\pi i) - \frac{i}{2}(2\pi i) = 2\pi. \end{aligned}$$

- 2 Berechnung mittels **Cauchyscher Integralformel**

$$\oint_c \frac{1}{1+z^2} dz = \oint_{c_1} \frac{\left(\frac{1}{z+i}\right)}{z-i} dz + \oint_{c_2} \frac{\left(\frac{1}{z-i}\right)}{z+i} dz = 2\pi.$$

Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel

Korollar 1: (Mittelwerteigenschaft)

Ist $f(z)$ holomorph auf dem Gebiet Ω , so gilt für $z_0 \in \Omega$, $\overline{K_r(z_0)} \subset G$ die Mittelwertformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Korollar 2: (Maximumprinzip)

- 1) Ist $f(z)$ holomorph auf Ω und besitzt $|f(z)|$ sein Maximum in $z_0 \in G$, dann ist $f(z)$ eine konstante Funktion.
- 2) Ist $f(z)$ stetig auf $\overline{\Omega}$ und holomorph auf Ω , so nimmt $|f(z)|$ sein Maximum stets auf dem Rand $\partial\Omega$ an.

Korollar 3: (Fundamentalsatz der Algebra)

Ist $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$, so besitzt $p(z)$ wenigstens eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra

Beweis:

Wir nehmen an, dass das Polynom keine Nullstelle besitzt. Dann ist die Funktion $f(z) := 1/p(z)$ holomorph auf ganz \mathbb{C} . Nun gilt

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \right| \\ &= \frac{1}{|z|^n} \cdot \left| \frac{1}{a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n}} \right|. \end{aligned}$$

Im Grenzfall $z \rightarrow \infty$ erhalten wir also $|f(z)| \rightarrow 0$.

Daher muss $|f(z)|$ in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ das Maximum annehmen und nach dem **Maximumprinzip** folgt $f(z) = \text{const.}$

Demnach ist auch $p(z) = \text{const.} =: \alpha$, aber dann gilt

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = \alpha,$$

und wir erhalten durch Koeffizientenvergleich $a_n = 0$, also einen

Widerspruch.

Taylor–Entwicklung komplexer Funktionen

Satz

Ist f auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \Omega$, so ist f in jedem Kreis $\overline{K_r(z_0)} \subset \Omega$ in eine **Potenzreihe** um den **Entwicklungspunkt** z_0 entwickelbar,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } |z - z_0| < r.$$

Insbesondere ist f auf Ω beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Die **Koeffizienten** a_k der Potenzreihe sind gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0).$$

Für den **Konvergenzradius** R der Taylor–Reihe gilt

$$R \geq \sup\{r > 0 : K_r(z_0) \subset \Omega\}.$$

Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel

Satz

Analog zur Cauchyschen Integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

gilt für die **Ableitungen** von $f(z)$ die Formel

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Beweis:

Nach der **Cauchyschen Integralformel** gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} d\zeta,$$

wobei der Kreis $|\zeta - z_0| = r$ **einmal** im positiven Sinn durchlaufen wird.

Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel

Beweis (cont.):

Liegt nun z **innerhalb** dieses Kreises, d.h. $|z - z_0| < r$, so folgt ebenfalls

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite ist der Grenzwert der **geometrischen Reihe**

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k.$$

Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel

Beweis (cont.):

Wir erhalten damit

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k.$$

Für den Integranden in obenstehendem Integral folgt

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k,$$

und damit kann die Integralformel in der Form

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k d\zeta$$

geschrieben werden.

Da die Potenzreihe **gleichmäßig** konvergiert, kann man Summation und Integration **vertauschen**.

Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel

Beweis (cont.):

Wir erhalten damit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k,$$

und ein **Koeffizientenvergleich** in der Potenzreihe ergibt

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

und damit die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel. □

Die Cauchysche Ungleichung

Satz

Sei $f(z)$ holomorph auf G , $z_0 \in G$, $\overline{K_r(z_0)} \subset G$. Für die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von $f(z)$ um z_0 gilt dann die **Abschätzung**

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

mit

$$M(r) = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Die Cauchysche Ungleichung

Beweis:

Aus der **verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel**

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

folgt direkt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|z-z_0|=r} \left(\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} \right) \cdot 2\pi r \\ &= \frac{1}{r^n} \cdot M(r). \end{aligned}$$



Der Satz von Liouville

Satz

Ist $f(z)$ **holomorph** und **beschränkt** auf \mathbb{C} , so ist $f(z)$ **konstant**.

Beweis:

Aus der Cauchyschen Ungleichung folgt im Grenzwert $r \rightarrow \infty$

$$f^{(n)}(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, n \geq 1$$

Damit ist auch $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f(z) = \text{const.}$ □

Ganze Funktionen

Definition

Eine in ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion heißt **ganze Funktion**

Bemerkung

- Jedes komplexe Polynom

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

ist eine ganze Funktion.

- Die komplexe Exponentialfunktion $f(z) = \exp(z)$ ist ganz.
- Der **Satz von Liouville** besagt: Jede ganze beschränkte Funktion ist beschränkt.

Singularitäten und Residuen

Satz: (Laurent-Entwicklung)

Sei f auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \leq R_1 < R_2$ mit

$$K_{R_1, R_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\} \subset \Omega$$

Dann ist $f(z)$ auf $K_{R_1, R_2}(z_0)$ in eine **Laurent-Reihe** mit **Entwicklungspunkt** z_0 entwickelbar,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für } R_1 < |z - z_0| < R_2.$$

Für die Koeffizienten gilt mit $R_1 < \rho < R_2$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Singularitäten und Residuen

Satz: (Laurent-Entwicklung) (cont.)

Weiterhin gilt: Die Reihe konvergiert innerhalb des größten Kreisringes $K_{r,R}(z_0)$, der noch innerhalb von Ω liegt, in jedem kleineren **kompakten** Kreisring $\overline{K_{\rho_1,\rho_2}(z_0)}$ ist die Konvergenz **absolut** und **gleichmäßig**.

Beweis des Satzes: Gegeben sei ein Kreisring $K_{r,R}(z_0) \subset \Omega$ mit $R_1 < r < R < R_2$ und den beiden Rändern

$$c_r(t) := z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$c_R(t) := z_0 + Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Behauptung: Nach dem Cauchyschen Integralsatzes gilt für einen Punkt $z \in K_{r,R}(z_0)$ die Beziehung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Singularitäten und Residuen

Beweis: (cont.)

Seien dazu die beiden Kurven c_1 und c_2 definiert wie an der **Tafel** angegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \oint_{c_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \oint_{c_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= 2\pi i \cdot f(z) + 0. \end{aligned}$$

Wir versuchen nun, für die beiden Kurvenintegrale entlang c_R und c_r eine **Reihendarstellung** herzuleiten.

Sei zunächst ζ ein Punkt auf c_R , also $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k. \end{aligned}$$

Singularitäten und Residuen

Beweis: (cont.)

Setzt man diese Formel in das Kurvenintegral ein, so folgt direkt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k.$$

Sei nun ζ ein Punkt auf c_r , d.h. $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^k \\ &= -\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \quad \text{mit } m = -(k + 1). \end{aligned}$$

Singularitäten und Residuen

Beweis: (cont.)

Einsetzen in das Kurvenintegral über c_r ergibt demnach

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = - \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k.$$

Addiert man nun beide Reihendarstellungen, so folgt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad r \leq |z - z_0| \leq R,$$

wobei die Koeffizienten durch

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & : k = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & : k = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

gegeben sind.

Singularitäten und Residuen

Beweis: (cont.)

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann auch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \quad (k \in \mathbb{Z})$$

für ein beliebiges $\rho \in [r, R]$.

Bemerkung:

- Die Laurent–Entwicklung von $f(z)$ ist bei **vorgegebenem** Kreisring **eindeutig** bestimmt.
- Ist $f(z)$ holomorph im gesamten Kreis $\overline{K_{R_2}(z_0)}$, so gilt aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes für $k = -1, -2, -3, \dots$ die Beziehung

$$a_k = 0$$

und die **Laurent–Entwicklung** stimmt dann mit der **Taylor–Entwicklung** überein.

Singularitäten und Residuen

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

mit **Entwicklungspunkt** $z_0 = 0$ und **Kreisring** $0 < |z| < \infty$.

Mit der Taylor-Entwicklung

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

erhalten wir die **Laurent-Reihe**

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

Singularitäten und Residuen

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Der Nenner hat **zwei Nullstellen** in $z = -1$ und $z = 2$. Es existieren daher **drei Laurent-Entwicklungen**, nämlich in $|z| < 1$, in $1 < |z| < 2$, und in $|z| > 2$.

Für den Kreisring $1 < |z| < 2$ gilt etwa

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1+1/z} \\ &= \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{3z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^k}{3} \cdot z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3 \cdot 2^{k+1}}\right) \cdot z^k. \end{aligned}$$

Isolierte Singularitäten

Definition

Sei $f(z)$ holomorph auf einem Gebiet Ω . Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **isolierte Singularität** von $f(z)$, falls ein $r > 0$ existiert mit $K_{0,r}(z_0) \subset \Omega$.

Ist $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$ die Laurent-Entwicklung in $K_{0,r}(z_0)$, so nennt man den Punkt z_0

- 1) eine **hebbare Singularität**, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$ gilt;
- 2) einen **Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$** , falls gilt

$$a_{-m} \neq 0 \quad \wedge \quad \forall k < -m : a_k = 0;$$

- 3) eine **wesentliche Singularität**, falls $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$ gilt.

Isolierte Singularitäten

Einige Beispiele

- Der Punkt $z_0 = 0$ ist eine hebbare Singularität der Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

denn die Taylor–Entwicklung lautet

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Isolierte Singularitäten

Einige Beispiele

- Die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

hat in $z_0 = 0$ einen Pol der Ordnung 1.

- Die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität, denn es gilt

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots$$

Isolierte Singularitäten

Ein weiteres Beispiel: Rationale Funktionen

Rationale Funktionen haben **keine** wesentlichen Singularitäten: Sei

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

eine rationale Funktion. Die Singularitäten sind die Nullstellen von $q(z)$. Ist nun z_0 eine m -fache Nullstelle von $q(z)$, so gilt

$$q(z) = (z - z_0)^m r(z), \quad r(z_0) \neq 0 \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot g(z),$$

wobei g holomorph in z_0 ist. Daraus folgt

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

d.h. z_0 ist ein **Pol** der Ordnung $\leq m$ oder eine **hebbare Singularität**, falls $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$.

Klassifikation von Singularitäten

Satz

- a) Ist z_0 eine **hebbare** Singularität, so existiert der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Die Funktion

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & : z \neq z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) & : z = z_0 \end{cases}$$

ist eine **holomorphe Fortsetzung** von $f(z)$.

- b) Ist $f(z)$ in einer Umgebung von z_0 **beschränkt**, so ist z_0 eine hebbare Singularität.
- c) Ist z_0 ein **Pol** von $f(z)$, so gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

- d) Ist z_0 eine **wesentliche** Singularität von $f(z)$, so bildet $f(z)$ jeden Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ auf \mathbb{C} oder $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ab.

Komplexe Partialbruchzerlegung, Residuensatz

Definition

Besitzt die Funktion $f(z)$ bei z_0 die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } 0 < |z - z_0| < r,$$

so nennt man

$$h(z; z_0) := \sum_{-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

den **Hauptteil** von $f(z)$ zum Entwicklungspunkt z_0 .

Satz

Ist $r(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion, wobei der Grad des Zählers echt kleiner als der Grad des Nenners ist, und sind z_1, \dots, z_m die (verschiedenen) Nullstellen von $q(z)$, so gilt

$$r(z) = h(z; z_1) + \dots + h(z; z_m)$$

Komplexe Partialbruchzerlegung, Residuensatz

Beweis des letzten Satzes:

Idee:

Wir zeigen, dass die Funktion $g(z)$ definiert durch

$$g(z) := r(z) - \sum_{j=1}^m h(z; z_j)$$

beschränkt und auf ganz \mathbb{C} **holomorph** ist. Nach dem Satz von Liouville folgt dann, dass $g(z)$ **konstant** ist. Mit $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$, folgt dann die Behauptung.

Offensichtlich ist $g(z)$ holomorph auf dem Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ und die Hauptteile der Laurent-Entwicklungen zu den Entwicklungspunkten z_1, \dots, z_m verschwinden identisch.

Komplexe Partialbruchzerlegung, Residuensatz

Beweis des letzten Satzes: (cont.)

Demnach sind die Punkte z_1, \dots, z_m hebbare Singularitäten und $g(z)$ ist holomorph auf ganz \mathbb{C} . Wegen $\text{grad } p < \text{grad } q$ folgt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} r(z) = 0$$

und damit auch

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0.$$

Also ist $g(z)$ beschränkt und holomorph auf ganz \mathbb{C} . Nach dem Satz von Liouville folgt

$$g(z) = \text{const},$$

und aufgrund des Grenzverhaltens für $z \rightarrow \infty$ folgt

$$g(z) = 0.$$



Komplexe Partialbruchzerlegung, Residuensatz

Anwendung des Satzes

Die **Partialbruchzerlegung** einer komplexen rationalen Funktion kann über die **Hauptteile** der Laurent–Entwicklungen berechnet werden, wobei die Entwicklungspunkte gerade die **Singularitäten** der rationalen Funktion sind.

Komplexe Partialbruchzerlegung, Residuensatz

Ein Beispiel zur Partialbruchzerlegung

Man bestimme die **Partialbruchzerlegung** der Funktion

$$f(z) = \frac{4}{(z+1)^2(z-1)}.$$

Der Nenner besitzt die beiden **Nullstellen** $z = -1$ und $z = 1$. Wir bestimmen daher die **Hauptteile** der Laurent-Entwicklungen um gerade diese beiden Punkte.

1) Für $z = -1$ schreibt man

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \underbrace{\frac{4}{z-1}}_{g(z)}.$$

Nun ist $g(z)$ in einer Umgebung des Punktes $z = -1$ **holomorph** und kann in eine **Taylor-Reihe** entwickelt werden.

Komplexe Partialbruchzerlegung, Residuensatz

Ein Beispiel zur Partialbruchzerlegung (cont.)

Es gilt daher

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \left(-2 - (z+1) + O((z+1)^2) \right),$$

und wir erhalten damit

$$f(z) = \underbrace{-\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1}}_{h(z;-1)} + \dots$$

Komplexe Partialbruchzerlegung, Residuensatz

Ein Beispiel zur Partialbruchzerlegung (cont.)

2) Analog schreiben wir für den Punkt $z = 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \underbrace{\frac{4}{(z+1)^2}}_{g(z)}$$

und erhalten durch **Taylor-Entwicklung**

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \left(1 - (z-1) + O((z-1)^2)\right) = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{h(z;-1)} - 1 + \dots$$

Demnach ist die **komplexe Partialbruchzerlegung** von $f(z)$ gegeben durch

$$f(z) = -\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}.$$

Der Residuensatz

Definition

Ist z_0 eine isolierte Singularität von $f(z)$, so besitzt $f(z)$ eine Laurent-Entwicklung zum Punkt z_0 , d.h.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } 0 < |z - z_0| < r$$

Man nennt dann

$$\text{Res}(f; z_0) := a_{-1}$$

das **Residuum** von $f(z)$ in z_0 .

Der Residuensatz

Satz

Sei Ω ein Gebiet, $f : \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph, c eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve in $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$, die in Ω nullhomotop ist, d.h. innerhalb von c liegen höchstens die isolierten Singularitäten z_1, \dots, z_m . Dann gilt

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Uml}(c; z_k) \cdot \text{Res}(f; z_k).$$

Der Residuensatz

Beweisskizze

- 1) Zunächst genügt es, nur die Singularitäten zu betrachten, die **innerhalb** von c liegen, da sonst die Umlaufzahl Null ist.
- 2) Man zerlegt c in geschlossene Kurven c_1, \dots, c_s , sodass jede dieser Kurven c_j nur **Singularitäten mit gleicher Umlaufzahl** l_j enthält.

Der Residuensatz

Beweisskizze

3) Jede Kurve c_j ist innerhalb von $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ homotop zu einer l_j -fach durchlaufenen einfach geschlossenen Kurve \tilde{c}_j . Daraus folgt

$$\oint_c f(z) dz = \sum_{j=1}^s \oint_{c_j} f(z) dz = \sum_{j=1}^s l_j \cdot \oint_{\tilde{c}_j} f(z) dz.$$

4) Jeder einfach geschlossene Weg \tilde{c}_j kann in eine Summe von Kreisen um die Singularitäten innerhalb von \tilde{c}_j zerlegt werden. Daraus folgt

$$\oint_c f(z) dz = \sum_{k=1}^m \text{Uml}(c; z_k) \oint_{|z-z_k|=\rho_k} f(z) dz.$$

Der Residuensatz

Beweisskizze (cont.)

Mit der **Laurent-Entwicklung** um z_k gilt aber

$$\begin{aligned}\oint_{|z-z_k|=\rho_k} f(z) dz &= \oint_{|z-z_k|=\rho_k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_k)^j dz \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \cdot \oint_{|z-z_k|=\rho_k} (z-z_k)^j dz \\ &= 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i \cdot \text{Res}(f; z_k).\end{aligned}$$

Für die Kurve an der **Tafel** erhält man also

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz &= 2\pi i \cdot [2\text{Res}(f; z_1) + \text{Res}(f; z_2) \\ &\quad + \text{Res}(f; z_3) + 2\text{Res}(f; z_4) + 2\text{Res}(f; z_5)].\end{aligned}$$

Methoden zur Berechnung von Residuen

Satz

- a) Ist z_0 ein **einfacher Pol** von $f(z)$, so besitzt $f(z)$ eine Darstellung der Form

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

mit einer in z_0 holomorphen Funktion $g(z)$. Für das Residuum gilt dann

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

- b) Ist $f(z) = p(z)/q(z)$ mit auch in z_0 holomorphen Funktionen p und q eine rationale Funktion und z_0 eine **einfache Nullstelle** von $q(z)$, so gilt

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

- c) Gilt $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$, $m \geq 1$ mit einer in einer Umgebung von z_0 holomorphen Funktion $g(z)$, so gilt

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Methoden zur Berechnung von Residuen

Beweis:

Wie man leicht sieht, ist Teil a) ein **Spezialfall** von Teil c).

Weiterhin kann Teil c) über eine **Taylor-Entwicklung** bewiesen werden, da $g(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph ist.

Wir schreiben zunächst

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m}.$$

Daraus kann man direkt das **Residuum** ablesen und es gilt

$$a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \text{Res}(f; z_0).$$

Für Teil b) definieren wir

$$q(z) =: (z - z_0)r(z).$$

Dann ist $r(z)$ im Punkt z_0 **holomorph fortsetzbar** mit $r(z_0) \neq 0$.

Methoden zur Berechnung von Residuen

Beweis: (cont.)

Für Teil b) definieren wir

$$q(z) =: (z - z_0)r(z).$$

Dann ist $r(z)$ im Punkt z_0 holomorph fortsetzbar mit $r(z_0) \neq 0$.
Damit ist die Funktion

$$g(z) = \frac{p(z)}{r(z)}$$

bei $z = z_0$ **holomorph** und wir erhalten für $f(z)$ die Darstellung

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}.$$

Nach Teil a) folgt wegen

$$q'(z) = r(z) + (z - z_0)r'(z)$$

gerade

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = g(z_0) = \frac{p(z_0)}{r(z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Beispiele: Berechnung von Residuen

Beispiel 1

Für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

hat man nach Teil a) des letzten Satzes

$$\operatorname{Res}(f; -1) = \left. \frac{1}{z-2} \right|_{z=-1} = -\frac{1}{3},$$

$$\operatorname{Res}(f; 2) = \left. \frac{1}{z+1} \right|_{z=2} = \frac{1}{3}.$$

Beispiele: Berechnung von Residuen

Beispiel 2

Für

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

gilt nach b)

$$\operatorname{Res}(f; i) = \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \frac{1}{2i} \quad \text{und} \quad \operatorname{Res}(f; -i) = \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=-i} = -\frac{1}{2i}.$$

Beispiele: Berechnung von Residuen

Beispiel 3

Die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)^2}$$

hat bei $z_0 = i$ einen **Pol zweiter Ordnung**. Nach dem letzten Satz, Teil c), gilt

$$\operatorname{Res}(f; i) = g'(i) = -\frac{3}{4e},$$

wobei die Funktion $g(z)$ aufgrund der Darstellung

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2(z-i)^2}$$

durch

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$$

gegeben ist.

Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz

Satz

Sei $r(x) = p(x)/q(x)$ eine rationale Funktion, die keine Singularitäten auf \mathbb{R} besitzt, und es gelte

$$\text{grad}(q) \geq \text{grad}(p) + 2.$$

Dann folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res}(r; z).$$

Beweis: Wegen $\text{grad}(q) \geq \text{grad}(p) + 2$ existiert nach dem **Majorantenkriterium** das oben stehende uneigentliche Integrale, denn für $x \gg 1$ gilt

$$\left| \frac{p(x)}{q(x)} \right| \leq \frac{c}{x^2}.$$

Wir approximieren jetzt das uneigentliche reelle Integral durch ein komplexes Integral entlang einer Kurve (siehe Tafel).

Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz

Beweis: (cont.) Ist r hinreichend groß, so liegen alle Singularitäten z_k von $r(z)$ mit strikt positivem Imaginärteil **innerhalb** der Kurve $c_1 + c_2$.

Daraus folgt

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(r; z_k) = \oint_{c_1 + c_2} r(z) dz = \int_{c_1} r(z) dz + \int_{c_2} r(z) dz.$$

Nun gilt

$$\int_{c_1} r(z) dz = \int_{-r}^r r(z) dz \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} r(z) dz \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Weiter berechnet man

$$\left| \int_{c_2} r(z) dz \right| \leq \max_{|z|=r} |r(z)| \cdot \pi r \leq \pi r \frac{C}{r^2} \longrightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt direkt die Behauptung. □

Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz

Beispiel

Wir untersuchen das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

Die Funktion $r(z) = 1/(1+z^6)$ besitzt sechs **Polstellen**, von denen drei in der **oberen Halbebene** liegen, nämlich $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Ferner gilt

$$\operatorname{Res}(r; z_k) = \frac{1}{6z^5} \Big|_{z=z_k} = -\frac{z_k}{6}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} &= 2\pi i \left(-\frac{1}{6} e^{i\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{6} e^{i\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6} e^{i\frac{5\pi}{6}} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left(\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3} \left(2 \sin \frac{\pi}{6} + 1 \right). \end{aligned}$$

Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz

Beispiel

Betrachte das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} dx$ mit $a > 0, \omega > 0$.

Der letzte Satz läßt sich nicht direkt anwenden, aber wegen

$$\left| \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2} \right| = \frac{e^{-\omega y}}{|z^2 + a^2|} \leq \frac{1}{|z^2 + a^2|} \leq \frac{c}{|z|^2} \quad \text{für } y \geq 0$$

entlang des Weges c_2 , gilt die Aussage **analog**.

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} dx &= 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} \left(\frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}; z_k \right) \\ &= 2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}; ia \right) = 2\pi i \frac{e^{i\omega z}}{2z} \Big|_{z=ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a}. \end{aligned}$$

Residuensatz: Weitere Anwendungen

Satz

Sei $f(z)$ holomorph auf $\{z : \operatorname{Im} z > -\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, mit Ausnahme **endlich vieler Singularitäten** in der oberen Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$.

Gilt

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty, y \geq 0} f(z) = 0,$$

so folgt

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{iz}; z_k).$$

Beispiel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0$$

Residuensatz: Weitere Anwendungen

Satz

Sei $r(z)$ eine **rationale Funktion ohne Polstellen** in $0 \leq x < \infty$ und es gelte $\text{grad } q > \text{grad } p$. Für $0 < \alpha < 1$ gilt dann

$$\int_0^{\infty} \frac{r(x)}{x^{\alpha}} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} \sum_{z_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \text{Res} \left(\frac{r(z)}{z^{\alpha}}; z_k \right)$$

Dabei ist folgender Zweig von z^{α} zu wählen

$$z = re^{i\phi} \quad \text{mit } 0 < \phi < 2\pi \quad \Rightarrow \quad z^{\alpha} = r^{\alpha} e^{i\alpha\phi}.$$

Beispiel

Man berechnet

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$