Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Dr. K. Rothe ©

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 2

Elementare komplexe Funktionen: (Fortsetzung)

Wurzelfunktion

Die Umkehrfunktion zu $f(z) = z^2 = w$ wird in Polarkoordinatendarstellung $w = re^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi < \pi$ für die rechte z-Halbebene durch den **Hauptwert** und für die linke durch den **Nebenwert** der Wurzel berechnet

$$\text{HW}: \ \sqrt{w} = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad \text{NW}: \ \sqrt{w} = \sqrt{r}e^{i(\varphi/2+\pi)} = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2}.$$

Hauptwert der Logarithmusfunktion

Der Hauptwert der Umkehrfunktion zu $f(z) = e^z = w$ wird für $w = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi = \arg w < \pi$ definiert durch

$$f^{-1}(w) = \ln w = \ln |w| + i \arg w \, .$$

Joukowski-Funktion:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

trigonometrische Funktionen:

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \, , \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \, , \quad \tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$$

hyperbolische Funktionen:

$$\sinh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \, , \quad \cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \, , \quad \tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

Aufgabe 5:

a) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus ln und $z_1 = -i$ und $z_2 = -2i$ berechne man

$$\ln(z_1)\ ,\ \ln(z_2) \quad \text{und} \quad \ln(z_1 z_2),$$

falls dies möglich ist.

b) Die sin-Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\ .$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von $\sin z$ und bestimme alle Lösungen von $\sin z = 2$.

Lösung:

a) Der Hauptwert $\ln z$ des Logarithmus ist definiert für $-\pi < \arg z < \pi$ durch

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z\ .$$

$\ln(z_1) = \ln(-i) = \ln|-i| + i\arg(-i) = \ln 1 - i\pi/2 = -i\pi/2$

$\ln(z_2) = \ln(-2i) = \ln|-2i| + i\arg(-2i) = \ln 2 - i\pi/2$

$z_1 z_2 = -i(-2i) = -2 = 2e^{-\pi i}$

Damit liegt $z_1 z_2$ nicht im Definitionsbereich des Hauptwertes und $\ln(z_1 z_2) = \ln(-2)$ kann nicht berechnet werden.

b) Mit $z = x + iy$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{-y+ix} - e^{y-ix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(-ie^{-y}(\cos x + i\sin x) + ie^{y}(\cos x - i\sin x)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sin x(e^{y} + e^{-y}) + i\cos x(-e^{-y} + e^{y})\Big) \\
&= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y
\end{aligned}$$

$2 = \sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y \quad \Rightarrow \quad \cos x\sinh y = 0$

1. Fall: $\sinh y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x\cosh 0 = \sin x = 2$ besitzt keine Lösung.

2.Fall: $\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ , \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)\cosh y = (-1)^k\cosh y = 2$

$\Rightarrow \quad \cosh y = 2 \text{ und } k = 2n \quad \Rightarrow \quad y = \pm\text{arcosh } 2$

$$\Rightarrow \quad z_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm i\text{arcosh } 2\ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe 6:

Gegeben sei die Joukowski-Funktion $w = f(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{z}{3} + \frac{3}{z}\right)$.

a) Man bestimme die Bilder

(i) des Kreises $|z| = 3$,

(ii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) > 0$,

(iii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) > 0$.

b) Man berechne die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ für $|z| > 3$.

Lösung:

a) (i) Mit der Polardarstellung $z = 3e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi < 2\pi$ auf dem Kreis $|z| = 3$ erhält man:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{3e^{i\varphi}}{3} + \frac{3}{3e^{i\varphi}}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \cos\varphi \in [-1, 1].$$

(ii) Die Polardarstellung $z = re^{i\pi/4}$, $0 < r < \infty$ des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) > 0$ ergibt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{re^{i\pi/4}}{3} + \frac{3}{re^{i\pi/4}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{r}{3}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) + \frac{3}{r}(\cos\pi/4 - i\sin\pi/4)\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r}\right)\cos\pi/4}_{=u} + i\underbrace{\left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)\sin\pi/4}_{=v}. \end{aligned}$$

$u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ erfüllen die Hyperbelgleichung

$$\frac{u^2}{\cos^2\pi/4} - \frac{v^2}{\sin^2\pi/4} = \left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r}\right)^2 - \left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)^2 = 1\,.$$

Mathematica Plot-Befehl

```
ParametricPlot[{Sqrt[2] Cosh[t]/2,
Sqrt[2] Sinh[t]/2}, {t, -2.1, 2.1},
AxesLabel -> {"Re", "Im"}, PlotRange -> {-3, 3}]
```

Mit

$$\cosh(t) = \left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r}\right)\,, \quad \sinh(t) = \left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)$$

entspricht der Radius $r = 3$ dem Wert $t = 0$.

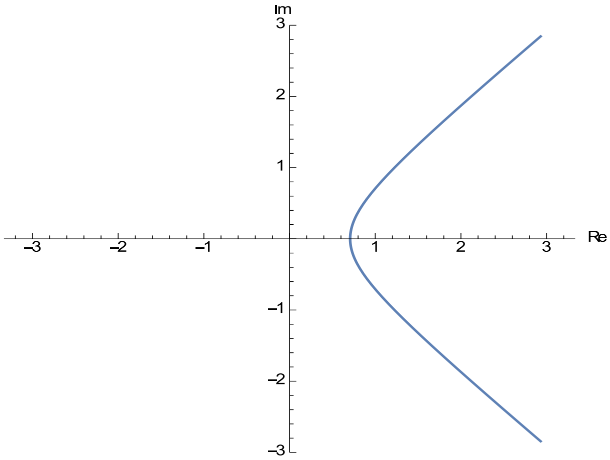

Bild 6 a)(ii): Hyperbel

(iii) Aus der Polardarstellung $z = re^{i\pi/2} = ir,\ 0 < r < \infty$ des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = 0\,,\ \mathrm{Im}(z) > 0$ folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{ir}{3} + \frac{3}{ir}\right) = i\underbrace{\left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)}_{=t} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Polardarstellung führt im Bild also auf die imaginäre Achse.

b) Die Umkehrfunktion von f ergibt sich durch Auflösen von $w = f(z)$ nach z:

$w = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{3} + \frac{3}{z}\right) \ \Leftrightarrow\ 6wz = z^2 + 9$

$\Leftrightarrow\ z^2 - 6wz + 9 = (z - 3w)^2 - 9w^2 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow\ (z - 3w)^2 = 9(w^2 - 1)$

Für $|z| > 3$ erhält man damit $z = f^{-1}(w) = 3w + 3\sqrt{w^2 - 1}$.

Für $w = re^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi < \pi$ wird dabei $\sqrt{w}$ für die rechte z-Halbebene durch den Hauptwert und für die linke z-Halbebene durch den Nebenwert der Wurzel berechnet

$$\mathrm{HW}: \ \sqrt{w} = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad \mathrm{NW}: \ \sqrt{w} = \sqrt{r}e^{i(\varphi/2+\pi)} = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2}.$$

Möbius-Transformationen:

Eine Abbildung $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ heißt **Möbius-Transformation**, wenn gilt

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit} \quad ad - bc \neq 0\,.$$

Sind zwei Tripel z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 jeweils verschiedener Zahlen aus $\mathbb{C}$ gegeben, dann gibt es genau eine Möbius-Transformation, für die $w_j = T(z_j)$ mit $j = 1, 2, 3$ gilt. Diese lässt sich berechnen, durch Auflösen der folgenden **Dreipunkteformel** nach w:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\,.$$

Eigenschaften:

a) Eine Möbius-Transformation ist **bijektiv** auf $\mathbb{C}^*$.

b) Die **Umkehrabbildung** einer Möbius-Transformation ist wieder eine Möbius-Transformation.

c) Ein Möbius-Transformation T ist **kreistreu**, d.h. sie bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab.

d) Ein Möbius-Transformation **erhält die Symmetrie** zu verallgemeinerten Kreisen.

e)
$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_0-z_1}{z_0-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$
wird als **Doppelverhältnis** der vier verschiedenen Punkte $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ bezeichnet.

f) Unter einer Möbius-Transformation T ist das Doppelverhältnis invariant, d.h. es gilt:
$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) = D(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3))\,.$$

g) Der Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ liegt genau dann auf dem durch die Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ bestimmten verallgemeinerten Kreis K, falls gilt

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}\,.$$

Denn für die Möbius-Transformation T mit $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = \infty$, $T(z_3) = 1$ gilt $T(K) = \mathbb{R}$ und

$$D(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) = T(z_0)\,.$$

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$T(z) = \frac{2(1+i)z}{z-1-i}\,.$$

a) Man überprüfe, ob es sich bei T um eine Möbiustransformation handelt.

b) Man berechne alle Fixpunkte von T in kartesischer und Polardarstellung.

c) Man bestimme das Bild der Winkelhalbierenden Re z = Im z.

d) Worauf wird die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden abgebildet?

e) Man berechne die Umkehrabbildung von T.

Lösung:

a) Ein Vergleich mit der Standardform $\quad T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \quad$ ergibt

$$ad = 2(1+i)(-1-i) = -4i \neq 0 = 0 \cdot 1 = bc\,,$$

d.h. T ist eine Möbius Transformation.

b) $\quad z = \dfrac{2(1+i)z}{z-1-i} \overset{z\neq 1+i}{\Leftrightarrow} z(z-1-i) = 2(1+i)z \Leftrightarrow z(z-3(1+i)) = 0$

Man erhält also die beiden Fixpunkte $z_1 = 0$ und
$z_2 = 3(1+i) = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

c) Die Punkte z_1, z_2 und $1+i$ liegen auf der Winkelhalbierenden, also einer Geraden. Daher liegen sie im Bild unter T auf einer Geraden oder einem Kreis. Da z_1 und z_2 Fixpunkte sind und $T(1+i) = \infty$ gilt, wird die Winkelhalbierende auf sich selbst abgebildet.

d) Die oberhalb der Winkelhalbierenden liegende Ebene wird wegen Teil c), $T(i) = 2-2i$ und weil T stetig ist auf die unterhalb der Winkelhalbierenden liegende Ebene abgebildet.

e) Durch Auflösen von $w = \dfrac{2(1+i)z}{z-1-i}$ nach z erhält man die Umkehrabbildung:

$$w = \frac{2(1+i)z}{z-1-i} \overset{z\neq 1+i}{\Leftrightarrow} w(z-1-i) = 2(1+i)z$$

$$\Leftrightarrow z(w-2(1+i)) = (1+i)w \overset{z\neq 2(1+i)}{\Leftrightarrow} z = T^{-1}(w) = \frac{(1+i)w}{w-2(1+i)}$$

Aufgabe 8:

a) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(0) = 0\,, \quad T(-2) = 4 \quad \text{und} \quad T(i-1) = 2+2i\,.$$

b) Liegen $z_0 = -1-i, z_1 = 0, z_2 = -2$ und $z_3 = i-1$ auf einem Kreis?

c) Man zeichne den Kreis $K:\ |z+1| = 1$ und die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = -2,\ z_3 = i-1$, sowie $T(K)$ mit $T(z_i)$ für $i = 1,2,3$.

Lösung:

a) Einsetzen in die Dreipunkteformel und Auflösen nach w ergibt:

$$\frac{w-0}{w-4} : \frac{2+2i-0}{2+2i-4} = \frac{z-0}{z+2} : \frac{i-1-0}{i-1+2} \Leftrightarrow \frac{w}{w-4} : \frac{i+1}{i-1} = \frac{z}{z+2} : \frac{i-1}{i+1}$$

$$\Rightarrow \quad w(z+2) = z(w-4)\underbrace{\frac{(i+1)^2}{(i-1)^2}}_{=-1} \Leftrightarrow wz + 2w = 4z - wz \Leftrightarrow w = \frac{2z}{z+1} =: T(z).$$

b) Eine Probe ergibt, dass $z_0, \ldots, z_3$ auf dem Kreis $|z+1| = 1$ liegen.

Alternativ und ohne Kenntnis des Kreises kann man auch nachprüfen, dass das Doppelverhältnis reell ist:

$$\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{-1-i}{-1-i+2} : \frac{i-1}{i-1+2} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(i-1)} = -1 \in \mathbb{R}$$

c) Die Punkte $z_1 = 0,\ z_2 = -2$ und $z_3 = i-1$ liegen auf dem Kreis K. Damit liegen die Punkte $T(z_1) = 0, T(z_2) = 4$ und $T(z_3) = 2+2i$ auf dem Bildkreis $T(K)$.

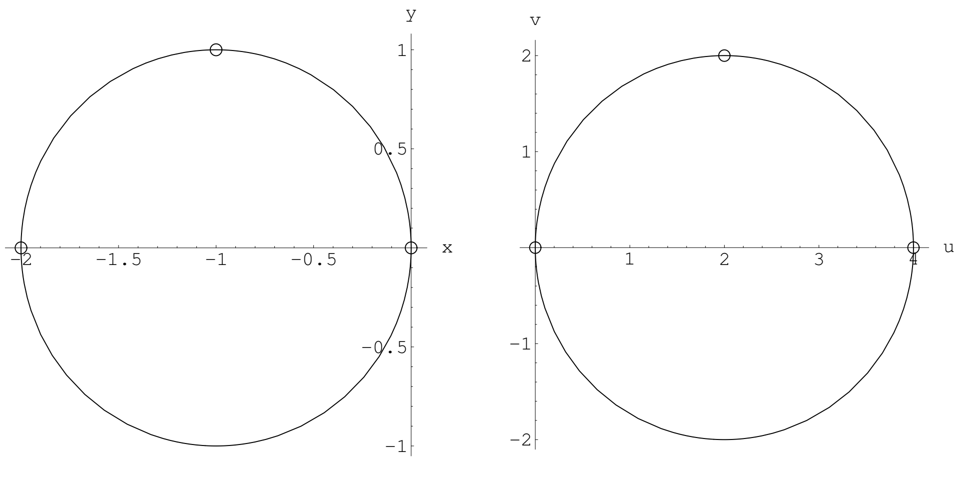

Bild 8: z_1, z_2, z_3 und K $\qquad$ w_1, w_2, w_3 und $T(K)$