Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3 (9.6.-12.6.20)

Aufgabe 9:

a) Für die Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 4i| = 3\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 6i| = 3\}$ berechne man die Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(3i) = 0\,, \quad T(-5i) = \infty \quad \text{und} \quad T(-3i) = 2\,.$$

c) Man skizziere die Bildkreise $T(K_1)$ und $T(K_2)$ und ermittle ihre Radien.

Aufgabe 10:

Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^3$ berechne man

a) $A := \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) - i f_y(z_0)\right)$ und

b) $B := \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + i f_y(z_0)\right)$.

Man vergleiche die Ergebnisse mit den Ableitungen von $f(z, \bar{z}) = z^3$ nach den unabhängigen Variablen z und $\bar{z}$, also mit

$$\frac{\partial f}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,.$$

Dabei sollen die bekannten Ableitungsregeln aus dem Reellen rein formal übertragen werden.

Aufgabe 11:

a) Man entscheide (mit Begründung), ob

(i) $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + 4i \cdot \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) + i$ holomorph ist,

(ii) $g(z) = \mathrm{Re}(e^z)$ holomorph ist,

(iii) $\mathrm{Re}(z^{10} + \sin^7 z)$ harmonisch ist.

b) Gegeben sei die Funktion

$$v(x, y) = 2xy - 6y + e^x \sin y.$$

(i) Man zeige, dass v harmonisch ist.

(ii) Zu $v(x, y)$ bestimme man eine Funktion $u(x, y)$, so dass die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 12:

Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = it$ und $c_2(t) = e^{it}$ jeweils für $0 < t < \pi$.

a) Man skizziere die Kurven c_1 und c_2 in der z-Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.

b) In welche Bildkurven der w-Ebene gehen c_1 und c_2 unter dem Hauptwert von $w = \ln z$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.