Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5 (Hausaufgaben)

Aufgabe 1:

a) Sei f eine analytische Funktion mit konstantem Realteil. Wie sieht der Imaginärteil von f aus? Tip: Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen.

b) Sei nun f analytisch mit Realteil $u(x+iy) = x^2 - y^2$. Zeigen Sie, dass der Imaginärteil v von f bis auf eine Konstante bestimmt ist. Geben Sie f als Funktion von $z = x + iy$ an.

c) Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten in Polarkoordinaten

$$ru_r = v_\varphi \,, \quad rv_r = -u_\varphi .$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben. Prüfen Sie für welche $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$\frac{1}{k}\ln(r^n) + i\varphi$$

holomorph ist. Um welche bekannte(n) Funktion(en) handelt es sich dann?

d) Es sei $f(z) = e^z$ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$, mit $-\pi < y < \pi$.
Die implizit gegebene Kurve (Ellipse)

$$\Gamma_1 : \qquad (\pi \cdot \mathrm{Re}\,(z))^2 + (6 \cdot \mathrm{Im}\,(z))^2 = \, 2\pi^2$$

und die Kurve (Gerade)

$$\Gamma_2(t) = t + i \cdot \frac{\pi}{6}, \; t \in \mathbb{R}^+$$

gehen beide durch den Punkt $z^* = \, 1 + i \cdot \frac{\pi}{6}$.
Um welchen Winkel werden die (Tangenten an die beiden) Kurven im Punkt z^* durch f gedreht?

Aufgabe 2: Gegeben seien die Kreisscheiben

$$\tilde{K}_1 : |z+5| \leq 4 \text{ und } \tilde{K}_2 : |z-5| \leq 4.$$

Die Kreisscheibe $\tilde{K}_1$ möge ein elektrostatisches Potential von 0 und die Kreisscheibe $\tilde{K}_2$ ein elektrostatisches Potential von 1 haben.

Zur Bestimmung des induzierten elektrostatischen Potentials soll das Gebiet außerhalb der Kreisscheiben bijektiv und konform auf einen Ring (Gebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen) abgebildet werden.

- Bilden Sie dazu die Ränder der Kreisscheiben, also die beiden Kreise

  $$K_1 : |z+5| = 4 \text{ und } K_2 : |z-5| = 4$$

  mit Hilfe einer Möbius-Transformation auf konzentrische Kreise um Null ab. Der kleinere der beiden Bildkreise soll den Radius 1 haben.

  Hinweis: bestimmen Sie zwei Punkte z und z', die symmetrisch zu beiden Kreisen K_1 und K_2 liegen und bilden Sie diese auf Null und ∞ ab. Alternativ können Sie die Seiten 60, 61 der Vorlesung verwenden.

- Lösen Sie das Problem in der Modellebene, also für den Ring. Beachten Sie Aufgabe 2 Präsenzaufgabenblatt 4, DGL II.

- Geben Sie die Lösung des ursprünglichen Problems, als Funktion von z an.

Abgabetermine: 08.06.21 - 11.06.21