Fachbereich Mathematik **SoSe 2021**

Prof. Dr. J. Struckmeier

Klausur Komplexe Funktionen

07. September 2021

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	TM	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1) [5 Punkte]

Es sei i die imaginäre Einheit und R das Rechteck

$$R := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, z = x + iy,\, x \in [0, \ln(2)],\, y \in [0,\, \pi)\} \;.$$

Bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \qquad f(z) := (e^z)^2 + 3 + i.$$

und fertigen Sie eine Skizze des Bildes an.

Lösungsskizze zur Aufgabe 1) [5 Punkte]

$\tilde{f}(z) := e^z \;=\; e^{x+iy} \;=\; e^x \cdot e^{iy} =: \;\tilde{\rho} \cdot e^{i\tilde{\alpha}}$ **[1 Punkt]**

$\tilde{\rho} = \left|\,\tilde{f}(z)\,\right| \;=\; e^x \;\in [e^0, e^{\ln(2)}] \;=\; [1, 2]\,, \qquad \tilde{\alpha} = \arg\left(\tilde{f}(z)\right) \;=\; y \;\in [0, \pi)\,.$
[1 Punkt]

$\hat{f}(z) = \left(\tilde{f}(z)\right)^2 = \;(\tilde{\rho}e^{i\tilde{\alpha}})^2 = \rho e^{i\alpha}$

mit $\rho = \;\tilde{\rho}^2 \in \;[1, 4]$ und $\alpha = \;2\tilde{\alpha} \in [0, 2\pi)$ **[1 Punkt]**

$\hat{f}(R)$ ist ein Kreisring um Null mit Innenradius 1 und Außenradius 4.

Die Addition bewirkt eine Verschiebung des Rings um $3 + i$. **[1 Punkt]**

Skizze: Kreisring um den Mittelpunkt $M = 3 + i$ mit Innenradius 1 und Außenradius 4.
[1 Punkt]

$$f(R) = \{w \in \mathbb{C} :\; 1 \leq |w - (3 + i)| \leq 4\}$$

Aufgabe 2) [6 Punkte]

a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\quad T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit

$$T(5) \,=\, 0\,, \qquad T(0) \,=\, -3\,, \qquad T(-5) \,=\, \infty\,.$$

b) Welche echten Kreise aus $\mathbb{C}$ werden durch T auf Geraden abgebildet?

c) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation T.

$K :=$ reelle Achse,

$\tilde{K} :=$ imaginäre Achse.

Lösungsskizze zur Aufgabe 2) [6 Punkte]

a) $$T(5) \,=\, 0\,, T(-5) \,=\, \infty \iff \qquad T(z) = \frac{a(z-5)}{z+5}.$$

$$T(0) \,=\, -3\,, \qquad \Longrightarrow \qquad T(z) = \frac{3z-15}{z+5}. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

b) Ein echter Kreis wird genau dann auf eine Gerade abgebildet, wenn der Punkt -5 auf ihm liegt. [**1 Punkt**]

c) $K = \mathbb{R}$ [**1 Punkte**]

Wegen der reellen Koeffizienten bzw. wegen der gegebenen Bilder von -5, 0, 5 ist $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Alternative Lösung: $\qquad -5 \in \mathbb{R} \iff T(\mathbb{R})$ ist eine Gerade.

$T(0) = -3$, $T(5) = 0 \iff T(\mathbb{R}) \,=\, \mathbb{R}$.

$\tilde{K} :=$ imaginäre Achse. [**2 Punkte**]

$-5 \notin i\mathbb{R} \iff T(i\mathbb{R})$ ist ein echter Kreis $K_{i\mathbb{R}}$.

$i\mathbb{R}$ symmetrisch zu $\mathbb{R} \quad \Longrightarrow T(i\mathbb{R})$ ist symmetrisch zu $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Der Mittelpunkt des Bildkreises liegt also in $\mathbb{R}$.

Wegen $T(0) = -3$ und $T(\infty) = 3$ ist Mittelpunkt des Bildkreises also $M = 0$ und der Radius $R = 3$.

Aufgabe 3) [9 Punkte] Gegeben sei

$$f(z) \;=\; \frac{z}{z^2 - iz + 2}\,.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f.

c) Geben Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

d) Wie viele verschiedene Laurent Reihen von f gibt es zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$? Geben Sie jeweils die Ringe an, in denen die Laurent Reihen gegen f konvergieren.

e) Berechnen Sie $\oint_{C_k} f(z)\,dz\,,\ k = 1, 2, 3$

(i) $C_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $C_1(t) = 5 + e^{it}$,

(ii) $C_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $C_2(t) = 5i + 5e^{it}$,

(iii) C_3 eine ein mal durchlaufene Kurve im Form einer 8, die $-i$ positiv und $2i$ negativ umläuft.

Lösung:

a) $z^2 - iz + 2 = 0 \iff z \in \{-i, 2i\}$.

Es liegen einfache Nullstellen des Nenners in $z_1 = -i$ und $z_2 = 2i$ vor. Der Zähler verschwindet für keinen der Punkte. Es liegen also einfache Pole vor **[2 Punkte]**

b) **[2 Punkte]**

$$Res(f; -i) = \left.\frac{z}{z - 2i}\right|_{z=-i} = \tfrac{-i}{-3i} = \tfrac{1}{3}.$$

$$Res(f; 2i) = \left.\frac{z}{z + i}\right|_{z=2i} = \tfrac{2i}{3i} = \tfrac{2}{3}.$$

c) PBZ: $f(z) = \dfrac{\frac{1}{3}}{z + i} + \dfrac{\frac{2}{3}}{z - 2i}$. **[1 Punkte]**

d) **[1 Punkt]**
Drei, und zwar in den Ringen: $R_1 : |z| < 1, \quad R_2 : 1 < |z| < 2, \quad R_3 : 2 < |z|$.

e) (i) $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)\,dz \;=\; 0$ (CIS) **[1 Punkte]**

(ii) $\displaystyle\oint_{C_2} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\, Res(f; 2i) \;=\; \frac{4\pi i}{3}$. **[1 Punkt]**

(iii) $\displaystyle\oint_{C_3} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\,(\,Res(f; -i) - \,Res(f; 2i)) = -\frac{2\pi i}{3}$. **[1 Punkt]**