Fachbereich Mathematik **WiSe 2022/23**
Prof. Dr. I. Gasser

Klausur Komplexe Funktionen

06. März 2023

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.
Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:	AIW	CS/CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	TM	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1) [4 Punkte]

Es sei i die imaginäre Einheit. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$\left(e^{i\frac{\pi}{8}} \cdot z\right)^4 = -16i\,.$$

und markieren Sie die Lösungspunkte in einer Skizze.

Lösungsskizze zur Aufgabe 1)

Mit $z = re^{i\phi}$ erhält man

$w := \left(e^{i\frac{\pi}{8}} \cdot z\right)^4 = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z^4 = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot r^4 \cdot e^{i4\phi} \stackrel{!}{=} 16e^{-i\frac{\pi}{2}}.$. [**Ansatz: 1 Punkt**]

$|w| = r^4 \stackrel{!}{=} 16 \iff r = 2\,.$. [**1 Punkt**]

$e^{i4\phi} = e^{-i\pi} \iff 4\phi = -\pi + 2k\pi$
$\iff \phi = \frac{-\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \qquad k = -1, 0, 1, 2.$ [**1 Punkt**]

Skizze: [**1 Punkt**]

Aufgabe 2) [4 Punkte]

Es sei i die imaginäre Einheit, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ und u die Funktion

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad u(x,y) = 4x^2 - 4y^2 + 2e^{3x}\sin(3y).$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist.

b) Bestimmen Sie alle zu u konjugiert harmonischen Funktionen v, das heißt alle Funktionen v, für die $f = u + iv$ überall in $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

Lösung zu 2:

a) i) $u_{xx} = (8x + 6e^{3x}\sin(3y))_x = 8 + 18e^{3x}\sin(3y)$.

$u_{yy} = (-8y + 6e^{3x}\cos(3y))_y = -8 - 18e^{3x}\sin(3y)$.

Also $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

ii) $f(z) = u(z) + iv(z)$ mit

$u(x+iy) = \mathrm{Re}\,(f(x+iy)) = 4x^2 - 4y^2 + 2e^{3x}\sin(3y)$.

$v_y = u_x = 8x + 6e^{3x}\sin(3y) \iff v(x,y) = 8xy - 2e^{3x}\cos(3y) + c(x)\,,$

$$-u_y = 8y - 6e^{3x}\cos(3y) \overset{!}{=} v_x = 8y - 6e^{3x}\cos(3y) + c'(x)$$

$$\iff c'(x) = 0 \implies v(x,y) = 8xy - 2e^{3x}\cos(3y) + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Gegeben ist $$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z+1)}\,.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten der Funktion f.

c) Geben Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

d) Wie viele verschiedene Laurent-Reihen mit Entwicklungspunkt $z_0 = 2$ gibt es zu f?

e) Bestimmen Sie diejenige Laurent-Entwicklung der Funktion f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2$, die in der Umgebung des Punktes $z^* = -2$ gegen $f(-2)$ konvergiert.

Lösungsskizze zur Aufgabe 3) $$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z+1)}\,.$$

a) Nennernullstellen: $z_1 = -1$ und $z_2 = 2$.

In z_1 ist ein einfacher Pol und z_2 ein zweifacher Pol. [**1 Punkt**]

b) Residuen [**2 Punkte**]

$$Res\, f(-1) = \left[\frac{1}{(z-2)^2}\right]_{z=-1} = \frac{1}{9}\,.$$

$$Res\, f(2) = \left[\left(\frac{1}{z+1}\right)'\right]_{z=2} = \left[\frac{-1}{(z+1)^2}\right]_{z=2} = -\frac{1}{9}\,.$$

c) $f(z) = h_f(z;2) + h_f(z;-1)$:

$$h_f(z;-1) = \frac{Res(f;-1)}{z+1} = \frac{1}{9(z+1)} \;\textbf{(1 Punkt)}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{z+1}}_{g(z)} = \frac{1}{(z-2)^2}\left(g(2) + g'(2)(z-2) + \cdots\right. \;\textbf{(1 Punkt)}$$

$$\Longrightarrow h_f(z;2) = \frac{1}{3(z-2)^2} - \frac{1}{9(z-2)}$$

Also: $$f(z) = \frac{1}{9(z+1)} + \frac{1}{3(z-2)^2} - \frac{1}{9(z-2)} \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

d) Zwei Reihen. Eine für $0 < |z-2| < 3$ und für $|z-2| > 3$. . **(1 Punkt)**

e) Wegen $|-2-z_0| = |-2-2| = 4 > 3$ suchen wir die Laurent-Reihe für $|z-2| > 3$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = 2$. In diesem Ring gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \frac{1}{\underbrace{z+1}} = \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \frac{1}{(z-2)+3} \\ &= \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{3}{z-2})} = \frac{1}{(z-2)^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{(z-2)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{(z-2)^{k+3}} = \sum_{k=-\infty}^{-3} (-3)^{-k-3} (z-2)^k \end{aligned}$$

[3 Punkte]

Aufgabe 4: (2 Punkte)

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+25)(x^2+4)}\,dx$.

Lösung:

$f(z) := \dfrac{1}{(z^2+25)(z^2+4)}$ hat die zwei Singularitäten (einfache Pole) $z_1 = 2i$ und $z_2 = 5i$ in der oberen Halbebene. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+25)(x^2+4)}\,dx &= 2\pi i(Res_f(5i) + Res_f(2i)) \\
&= 2\pi i\left(\left[\frac{1}{(z+5i)(z^2+4)}\right]_{z=5i} + \left[\frac{1}{(z+2i)(z^2+25)}\right]_{z=2i}\right) \\
&= 2\pi i\left(\left[\frac{1}{(10i)(-21)}\right] + \left[\frac{1}{(4i)(21)}\right]\right) \\
&= \frac{2\pi}{21}\left(-\frac{1}{(10)} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{210} = \frac{\pi}{70}
\end{aligned}$$