Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2022**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2 (Hausaufgaben)

Aufgabe 1:
Es sei i die imaginäre Einheit. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichungen

$$\text{a) } e^{3z} - \frac{i}{e^z} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \text{b) } \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\,z^3 = i\,.$$

Aufgabe 2:

Im $\mathbb{R}^2$ kann jedes beliebige Rechteck mittels einer affin linearen Funktion auf jedes beliebige Parallelogramm abgebildet werden. Prüfen Sie, ob das Quadrat

$$Q := \{z \in \mathbb{C}, z = x + iy,\ x, y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], i^2 = -1\}$$

jeweils mittels einer affin linearen Abbildung auf Parallelogramme mit den folgenden Ecken in $\mathbb{C}$ abgebildet werden kann und gegeben Sie gegebenenfalls eine geeignete Abbildung an.

a) $\binom{-1}{-i}, \binom{3}{-i}, \binom{3}{i}, \binom{-1}{i}$,

b) $\binom{-1}{-i}, \binom{3}{-i}, \binom{3}{3i}, \binom{-1}{3i}$, c) $\binom{1}{-i}, \binom{2}{2i}, \binom{-1}{i}, \binom{-2}{-2i}$,

d) $\binom{0}{-2i}, \binom{2}{0}, \binom{0}{2i}, \binom{-2}{0}$, e) $\binom{2}{0}, \binom{4}{2i}, \binom{2}{4i}, \binom{0}{2i}$.

Hinweis: Skizzen können sehr hilfreich sein.

Aufgabe 3: (Lesen Sie die Hinweise am Ende der Aufgabe)
Gegeben sei die Abbildung $w = f(z) := \dfrac{1}{z}$ mit $z \neq 0$.

a) Bestimmen Sie die Bilder

  (i) der Strahlen $\arg(z) = \varphi_0$,

  (ii) der Geraden $\mathrm{Re}(z) = x_0$, also $z + \overline{z} = 2x_0$,

  (iii) der Geraden $\mathrm{Im}(z) = y_0$.

b) Bestimmen Sie das Bild des Kreises $|z - \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$ ohne $z = 0$.

Hinweise:

1) Setzen Sie in die Gleichungen, die die Urbilder beschreiben $z = \frac{1}{w}$ und stellen sie diese Gleichungen so um, dass Sie erkennen, welche Mengen im Bildraum beschrieben werden.

2) Die Gleichung $|z - c| = r$ beschreibt einen Kreis um c mit Radius r. Machen Sie sich folgende Äquivalenzen klar, die es ermöglicht, den Kreis ohne Verwendung der Betragsstriche zu beschreiben.

$|z - c| = R \iff (z - c)\,\overline{(z - c)} = R^2$

$\iff (z - c)\,(\overline{z} - \overline{c}) = R^2$

$\iff z\overline{z} - z\overline{c} - c\overline{z} + c\overline{c} = R^2\,.$

Abgabetermine: 18.4.22 - 22.4.21