

Komplexe Funktionen

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3: Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

$\ln(z)$ bezeichne den Hauptwert des komplexen Logarithmus. Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2}(-1 + i), \quad z_2 = 3i, \quad z_3 = -4i.$$

a) Berechnen Sie die kartesischen Darstellungen von

$$z_4 := z_1 \cdot z_2, \quad z_5 := \frac{z_1}{z_2}, \quad z_6 := z_1 \cdot z_3, \quad z_7 := \frac{z_1}{z_3}.$$

b) Berechnen Sie $\ln(z_k)$, $k = 1, 2, \dots, 7$.

c) Vergleichen Sie für $k = 2, 3$

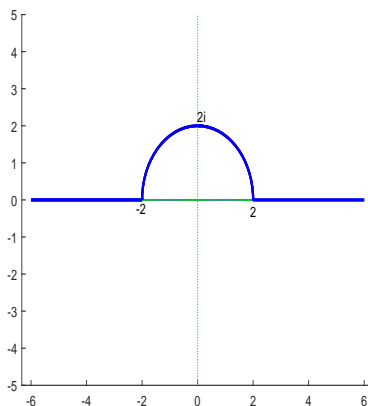
$$\ln(z_1 \cdot z_k) \text{ mit } \ln(z_1) + \ln(z_k) \\ \text{und} \\ \ln\left(\frac{z_1}{z_k}\right) \text{ mit } \ln(z_1) - \ln(z_k).$$

d) Für welche komplexen Zahlen gelten die aus \mathbb{R} bekannten Rechenregeln:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)?$$

Aufgabe 2: Es seien

$$D_1 := \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : z = 2e^{i\phi}, \phi \in]0, \pi[\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < \infty\},$$



und

$$D_2 := \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : z = 2e^{i\phi}, \phi \in]\pi, 2\pi[\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < \infty\}.$$

Bestimmen Sie die Bilder von D_1 und D_2 unter der Abbildung $f(z) = \frac{2}{z} + \frac{z}{2}$.

Auf welche der Mengen D_1 , D_2 , $D_1 \cup D_2$ ist f umkehrbar?

Aufgabe 3:

- a) (i) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $(z - 2i)^{10} = z^{10}$?
(ii) Zeigen Sie, dass alle Lösungen der Gleichung aus i) auf der Geraden $\operatorname{Im}(z) = 1$ liegen.
- b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $(z - 2i)^i = z^i$?

Bearbeitung: 02-06.05.22