Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2022**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Geben Sie eine Möbius-Transformation an, mit

$$T(0) = 2i,\ T(4) = 0,\ T(8) = \infty\,.$$

b) (i) Bestimmen Sie die Bilder folgender Geraden unter der Abbildung T aus a). Geben Sie dazu jeweils eine genaue Begründung an.

A) $g_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : \mathrm{Im}\,(z) = 0\}\,.$

B) $g_2 = \{z \in \mathbb{C}^* : \mathrm{Im}\,(z) = 8 - \mathrm{Re}\,(z)\}\,.$

C) $g_3 = \{z \in \mathbb{C}^* : \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z)\}\,.$

(ii) Auf welche Menge wird dann das Innere des Dreiecks mit den Ecken $0,\ 8,\ 4+4i$ abgebildet? Fertigen Sie Skizzen der Urbild- und Bildebene an!

Aufgabe 2:

Zur Lösung eines Potentialproblems soll das Gebiet außerhalb der beiden Kreisscheiben

$\tilde{K}_1 := \left\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{5}{2}| \le \frac{3}{2}\right\}$, und

$\tilde{K}_2 := \left\{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{5}{2}| \le \frac{3}{2}\right\}$

auf das Innere eines Kreisringes um Null abgebildet werden. Geben Sie eine geeignete Transformation an.

Aufgabe 3:

Es sei i die imaginäre Einheit und $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $k, l \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := (x^3 + kxy^2) + i \cdot \left(lx^2y - y^3\right)$$

in jedem Punkt aus $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

b) Gegeben ist die Funktion

$$u(x+iy) = \mathrm{Re}\,(f(x+iy)) = 3\cos(4x)e^{4y}\,.$$

i) Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist.

ii) Bestimmen Sie alle zu u konjugiert harmonischen Funktionen v, das heißt alle Funktionen v, für die $f = u + iv$ überall in $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

Abgabe: 16.- 20.5.22