Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2022**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4 : Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Hinweis : Sie brauchen keine konkrete Transformation anzugeben.

a) Zur Lösung eines Potentialproblems soll das Gebiet außerhalb der beiden Kreisscheiben

$K_1 := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-2| \,\leq\, \frac{3}{2}\right\}$, und

$K_2 := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z+1| \,\leq\, \frac{3}{2}\right\}$

auf ein Parallelstreifen oder auf das Innere eines Kreisringes um Null abgebildet werden. Welche der beiden Transformationen ist mit Hilfe einer Möbius-Transformation möglich?

b) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ fest vorgegeben. Welche der folgenden Gebiete können mittels einer Möbiustransformation auf einen Sektor der Form

$$S := \left\{ w \in \mathbb{C} : w = r\, e^{i\phi},\, r \in \mathbb{R}^+,\, -\pi < \varphi_1 < \phi < \varphi_2 < \pi \right\}$$

abgebildet werden? Bitte begründen Sie Ihre Antworten.

(i)
$$G_1 := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \alpha < |z| < \beta \} \,.$$

(ii)
$$G_2 := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \alpha < \mathrm{Re}\,(z) < \beta \} \,.$$

(iii)
$$G_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z - \alpha| < \frac{3}{4}\,|\beta - \alpha|\,,\, |z - \beta| < \frac{3}{4}\,|\beta - \alpha| \right\} .$$

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\quad T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit

$$T(i) \,=\, 0\,, \qquad T(0) \,=\, 2\,, \qquad T(2i) \,=\, \infty\,.$$

b) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation T.

(i) $K :=$ imaginäre Achse,

(ii) $K_2 := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \,=\, 2 \}$,

(iii) $\tilde{K} :=$ reelle Achse.

c) Bestimmen Sie das Bild der Viertelebene

$$S := \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0 \} .$$

d) Bestimmen Sie das Bild von

$$H := \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 3 \} .$$

Aufgabe 3:

In welchen Punkten ihres Definitionsbereiches sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar?

a) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_1(z) = \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z)$.

b) $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
$f_2(z) = (\mathrm{Re}(z) + 2)^2 - (\mathrm{Im}(z) + 2)^2 + i\big[\mathrm{Im}(z)(\mathrm{Re}(z) + 4) + \mathrm{Re}(z)(\mathrm{Im}(z) + 4)\big]$ ·

c) $f_3 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ f_3(z) = \dfrac{z^2}{\bar{z}}$.
Tipp: Verwenden Sie die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten: $u_r = \frac{1}{r} v_\varphi$ und $v_r = -\frac{1}{r} u_\varphi$.

Bearbeitungstermine: 16.5.22 - 20.5.22