

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5: Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale und skizzieren Sie die zugehörigen Kurven.

$$\text{a) } \int_{C_1+C_2} |z| dz := \int_{C_1} |z| dz + \int_{C_2} |z| dz,$$

C_1 : geradliniger Weg von -1 nach 1,
 C_2 : Halbkreis mit Radius 1 um Null,
 von 1 nach -1 in mathematisch
 positiver Richtung durchlaufen.

$$\text{b) } \int_C (1+z) dz,$$

$C(t) := \cos t + 3i \sin t, t \in [-\pi, 0]$ (Halbellipse)

$$\text{c) } \int_c (\bar{z})^2 dz,$$

$c(t) = 2e^{(-1+i)t}, t \in [0, \pi/4],$

$$\text{d) } \int_C e^{3z} dz,$$

C : Das Stück der Parabel $\text{Im}(z) = \pi(\text{Re}(z))^2$
 welches die Punkte Null und $1 + i\pi$ verbindet.

Aufgabe 2:

a) In welchem Gebiet ist die Möbiustransformation $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ winkeltreu?

b) Ist es möglich das Gebiet

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, \text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) > 0\}$$

mittels einer Möbiustransformation auf das Innere eines echten Dreiecks abzubilden? Unter einem echten Dreieck verstehen wir ein Dreieck dessen Eckpunkte im Endlichen liegen.

- c) Die Abbildungsvorschrift $f : z \rightarrow e^{\frac{i\pi}{4}} \bar{z}$ beschreibt eine Drehspiegelung. Offensichtlich verursacht diese keine Längenverzerrungen. Die Größe der Winkel wird ebenfalls erhalten. f ist als Transformation $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wo ist f komplex differenzierbar? Wie verträgt sich Ihr Ergebnis mit dem Satz aus Seite 75 der Vorlesung:

Satz: Ist $w = f(z)$ eine konforme Abbildung und als Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so ist $f(z)$ komplex differenzierbar und es gilt $f'(z) \neq 0$.

- d) Das Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}, -\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8}, 0 < r < 2\}$ soll bijektiv und konform auf das Innere des Einheitskreises transformiert werden. Warum tut es $z \mapsto \left(\frac{z}{2}\right)^8$ nicht?

Zusatzaufgabe/Kür: Geben Sie eine bijektive, konforme Abbildung an, die das Gewünschte leistet.

Bearbeitungstermine: 06.06.22 - 10.06.22