Aufgabe 1

Gegeben sei die Folge $a_n := \dfrac{5n^2}{(n-1)\,(n+1)\,(n+2)}$ für $n \geq 2$.

Man beweise:

a) $0 < a_n \leq \dfrac{5}{n+1}, \quad \forall n \geq 2$,

b) $(a_n)_{n\geq 2}$ ist monoton fallend,

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert.

d) Geben Sie eine obere und untere Schranke für den Grenzwert der Reihe an.

Aufgabe 2

a) Man berechne die folgenden Grenzwerte unter Anwendung der Regeln von l'Hospital:

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte **ohne** die Regeln von l'Hospital heranzuziehen.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}, \quad n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.