Die Folge $a_n := \left(1+\frac{p}{n}\right)^n$ (W. Hofmann WS 02/03)

a) Wie im Buch Beispiel (8.2.13) zeigt man für $p > 0,\ n \in \mathbb{N}$:
Die Folge (a_{n+1}) ist streng monoton wachsend:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{bzw.} \quad a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

b) Die Folge (a_n) ist, zunächst für $p = 1$, nach oben beschränkt:

$$(a_n) = \left(1+\frac{p}{n}\right)^n \overset{(1)}{\leq} \left(1+\frac{p}{2n}\right)^{2n} \overset{rechnen}{=} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{2n}} \overset{Bernoulli}{\leq} \frac{1}{\left(1-\frac{n}{2n+1}\right)^2}$$
$$= \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^2 = \left(1+\frac{n}{n+1}\right)^2 \leq 2^2 = 4,$$

also $a_n \leq 4$. (2)

Für beliebige $p > 0$ zeigen wir: a_n ist beschränkt, genauer:

Für $\ell \in \mathbb{N},\ \ell \geq p$ gilt $a_n \leq 4^\ell \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \left(1+\frac{p}{n}\right)^n \overset{p\leq\ell}{\leq} \left(1+\frac{\ell}{n}\right)^n \overset{(1),\, n\leq \ell n}{\leq} \left(1+\frac{\ell}{\ell n}\right)^{\ell n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^\ell \overset{(2)}{\leq} 4^\ell. \tag{3}$$

Damit gilt:

$$(a_n) \text{ konvergiert für jedes } p > 0. \tag{4}$$

Für $p = 1$ ist der Grenzwert die **Eulersche Zahl** e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718... \tag{5}$$

c) Wir zeigen: Für rationale $p = \frac{z}{m},\ z, m \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} = e^p$.

Dazu benötigen wir die Aussage:

Ist (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a, so konvergiert auch jede Teilfolge von (a_n) gegen den Grenzwert a.

Beweis: offensichtlich durch Hinschreiben der Grenzwertbedingung.

Mit den Teilfolgen $n_k = kz, j_k = km,\ k \in \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen berechnen wir

$$a_{n_k} = \left(1+\frac{p}{n_k}\right)^{n_k} = \left(1+\frac{z/m}{n_k}\right)^{n_k} = \left(1+\frac{1}{\frac{n_k m}{z}}\right)^{n_k} = \left(1+\frac{1}{km}\right)^{kz}$$
$$= \left(1+\frac{1}{km}\right)^{km\frac{z}{m}} = \left(\left(1+\frac{1}{km}\right)^{km}\right)^{\frac{z}{m}} = \left(\left(1+\frac{1}{km}\right)^{km}\right)^p = \left(\left(1+\frac{1}{j_k}\right)^{j_k}\right)^p.$$

Hieraus folgt für $k \to \infty$ unter Verwendung obiger Aussage und (5)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = e^p. \tag{6}$$

Unter Verwendung von (6) zeigt man, nun wieder wie im Buch Bemerkung (8.2.16), dass die Grenzwertbeziehung (6) auch für negative, rationale p gilt.