Produkt zweier konvergenter Reihen: $(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum\limits_{l=0}^{\infty} b_l)$ (W. Hofmann WS 02/03)

Wenn man ausmultiplizieren darf, gilt zum Beispiel:

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{l=0}^{\infty} b_k) = a_0 \sum_{l=0}^{\infty} b_l + a_1 \sum_{l=0}^{\infty} b_l + = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \sum_{l=0}^{\infty} b_l) = \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{l=0}^{\infty} a_k b_l) = \sum_{k=l=0}^{\infty} a_k b_l .$$

In der letzten Summe darf im Summanden $a_k b_l$ jedes Indexpaar (k,l) nur einmal auftreten. Beachte jedoch, daß (k,l) und (l,k) verschiedene Produkte, nämlich $a_k b_l$ und $a_l b_k$, bezeichnen. Eine Reihenfolge der Produktterme $a_k b_l$ ist nicht festgelegt. Man hätte beim Ausmultiplizieren ja auch mit $\sum\limits_{l=0}^{\infty}(b_l \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k)$ beginnen können. Das bedeutet eine Umordnung der Produktreihe. Nach den bisherigen Sätzen wird man also Konvergenz der Produktreihe nur im Sinne absoluter Konvergenz erwarten können. Wir setzen also voraus:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = A \text{ und } \sum_{l=0}^{\infty} |b_l| = B \text{ seien konvergent.}$$

Dann ist jede Teilsumme der Produktreihe gleichmässig beschränkt, denn für beliebige Umordnungen $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ von $\mathbb{N}_0$ gilt für $N := \max_{k=1,\dots,m}(\sigma_k, \mu_k)$

$$\sum_{k=0}^{m} |a_{\sigma_k} b_{\mu_k}| \le \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} |a_k|\,|b_l| \le (\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|)(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l|) = AB.$$

Nach Satz 8.4.7 a) des Buches ist die Produktreihe absolut konvergent,also auch konvergent (Bemerkung (8.4.6)) und nach dem Umordnungssatz ist der Grenzwert von der Anordnung unabhängig. Es fehlt zur Darstellung also nur noch eine geeignete Reihenfolge der Produktglieder. Da die ersten Summanden einer Reihe üblicherweise größer sind als die späteren, empfiehlt sich eine solche Reihenfolge also auch für die Darstellung der Produktreihe. Man ordnet die Reihenfolge der Produktglieder deshalb an, indem man die Summe der Indizes ansteigen lässt. Dann sind auch in der Produktdarstellung die früheren Summanden im Allgemeinen größer als die späteren, was für eine approximative Darstellung der Produktreihe durch Weglassen der späteren Glieder (Abschneiden der unendlichen Reihe nach endlich vielen Summanden) wichtig ist:

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{l=0}^{\infty} b_l) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} .$$

Diese Darstellung heißt Cauchy-Produkt der Reihen. Zusammenfassend haben wir also folgenden

Satz (Produkt von Reihen)

Die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k, \sum\limits_{l=0}^{\infty} b_l$ seien absolut konvergent.

Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k}$ für beliebige Umordnungen $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}, (\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Indizes $k, l \in \mathbb{N}_0$ absolut konvergent und der Grenzwert ist unabhängig von den Umordnungen. Insbesondere gilt die Darstellung

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{l=0}^{\infty} b_l) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} . \qquad \textbf{Cauchy-Produkt}$$