Aufgabe 1:

a) Begründen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert, und geben Sie eine obere und eine untere Schranke für den Grenzwert an

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)\,(k+2)\,(k+3)}\,.$$

b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sinh x}{x^3}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2+5x+2}{8x^2+8x+2}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+5x+2}{6x^2+5x+1}$.

c) Prüfen Sie, ob man den Parameter a bzw. b so wählen kann, dass die Funktion f bzw. g auf ganz $\mathbb{R}$ stetig wird.

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\dfrac{e^x}{x}\right) & : \ x \neq 0 \\ a & : \ x = 0 \end{cases} \qquad\qquad g(x) := \begin{cases} e^{x-1} & : \ x < 1 \\ bx + 4 & : \ x \geq 1 \end{cases}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = t^2 + t - 6.$$

a) Zeigen Sie, dass das Newton Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion f mit dem Startwert $t_0 = 3$ die Folge

$$t_0 = 3, \quad t_{n+1} = \frac{t_n^2 + 6}{2t_n + 1}; \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

erzeugt.

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $t_n \geq 2$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist.

d) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und bestimmen Sie den Grenzwert.