Aufgabe 1:

a) Man untersuche die folgenden Reihen mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums auf Konvergenz

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n+6}{n(n+1)}\,,$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \cos(n\pi)\, \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\,.$

b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte unter Anwendung der Regeln von l'Hospital.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)}{\ln(x^2)}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}$

Lösung zur Aufgabe 1:

a) (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n+6}{n(n+1)}\,.$

Mit $a_n := \dfrac{n+6}{n(n+1)}$ gilt wegen $n, n+1, n+6 > 0$ offensichtlich $a_n > 0\,.$

Außerdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{6}{n}}{n+1} = 0$$

und es ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+7}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{n+6} = \frac{n^2+7n}{n^2+8n+12} < 1$$

d,h,, dass die Folge der a_n streng monoton fällt.

(Alternative zum letzten Schritt:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{(n+6)(n+2)-n(n+7)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n+12}{n(n+1)(n+2)} > 0)$$

Die Folge der a_n ist also positiv, und streng monoton fallend gegen Null. Damit sind die Vorraussetzungen zur Anwendung des Leibniz Kriteriums erfüllt. Die Reihe ist konvergent.

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \cos(n\pi)\, \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Zunächst stellt man fest, dass $\cos(n\pi) = (-1)^n$ gilt. Mit $a_n := \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ überprüft man dann die Vorraussetzungen zur Anwendung des Leibniz Kriteriums.

Es gilt $\frac{\pi}{n} \in (0, \frac{\pi}{2}],\ \forall n \geq 2$. Für Argumente zwischen 0 und $\pi/2$ nimmt die Sinus–Funktion nur positive Werte an. Es gilt also $a_n > 0$. Außerdem ist die Sinus–Funktion hier streng monoton steigend. Also

$$\frac{\pi}{n+1} < \frac{\pi}{n} \Longrightarrow \sin(\frac{\pi}{n+1}) < \sin(\frac{\pi}{n}) \Longrightarrow a_{n+1} < a_n.$$

Die Folge der a_n fällt also streng monoton.

Weiterhin gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\right) = \sin(0) = 0$$

Die Folge der a_n ist also positiv, und streng monoton fallend gegen Null. Damit sind die Vorraussetzungen zur Anwendung des Leibniz Kriteriums erfüllt. Die Reihe ist konvergent.

b) (i) $\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln(x^2)} = \lim_{x\to 1} -\frac{\pi}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{2x}{x^2}} = -\frac{\pi}{4}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{1}{6}$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die k-te Ableitung von f für alle $k \in \mathbb{N}_0$ durch die Formel

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k\,(x^2 - 2kx + k(k-1))}{e^x} \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

gegeben ist.

b) Geben Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

c) Schätzen Sie den absoluten Fehler $|f(x) - T_3(x;0)|$ im Intervall $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ nach oben ab.

Lösung zur Aufgabe 2:

$f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

a) Behauptung : für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt die Formel

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k\,(x^2 - 2kx + k(k-1))}{e^x}\cdot$$

Beweis mittels vollständiger Induktion: *Induktionsanfang:* $k = 0$

$$\frac{(-1)^0\,(x^2 - 0 + 0)}{e^x} = \frac{x^2}{e^x} = f(x)\cdot$$

Induktionsschritt: Annahme: Die Behauptung gilt für ein festes $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' &= \left(\frac{(-1)^k\,(x^2 - 2kx + k(k-1))}{e^x}\right)' \\
&= (-1)^k \frac{(2x-2k)e^x - e^x(x^2 - 2kx + k(k-1))}{e^{2x}} \\
&= (-1)^k \frac{2x - 2k - x^2 + 2kx - k(k-1))}{e^x} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{x^2 - (2x + 2kx) + 2k + k(k-1))}{e^x} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{x^2 - 2(k+1)x + k(k+1))}{e^x}
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. Damit gilt die angegebene Formel für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Nach Teil a) gilt

$$f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k\,(k(k-1))}{e^0}\cdot$$

Also $f(0) = f'(0) = 0$ und $f''(0) = 2$, sowie $f'''(0) = -6$. Damit erhalten wir

$$T_3(x;0) = x^2 - x^3\cdot$$

c) Für den Fehler gilt $|f(x) - T_3(x;0)| \le \dfrac{|f^{(4)}(\zeta)|}{4!}\,x^4$, mit einem $\zeta \in [-0.5, 0.5]$.

Nach Voraussetzung ist $|x| \le \frac{1}{2}$. Die Formel für die vierte Ableitung entnehmen wir dem Teil a). So erhalten wir

$$\begin{aligned}
|f(x) - T_3(x;0)| &\le \frac{|\zeta^2 - 8\zeta + 12|}{e^\zeta} \cdot \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
&\le \frac{\zeta^2 + 8|\zeta| + 12}{e^{-0.5}} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{16} \\
&\le \frac{(0.25 + 4 + 12)\,\sqrt{e}}{24 \cdot 16} \\
&< \frac{18 \cdot 2}{24 \cdot 16} = \frac{3}{32} < 0.1
\end{aligned}$$