Aufgabe 1:

a) Man untersuche die folgenden Reihen mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums auf Konvergenz

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n-1)}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte unter Anwendung der Regeln von l'Hospital.

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{2 + x^2 - 2\cos(x)}{x^2}$

Lösung zur Aufgabe 1:

a) (i) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n-1)}$,

Mit $a_n := \frac{n+2}{n(n-1)}$ gilt wegen $n, n-1, n+2 > 0,\ \forall n \geq 2$ offensichtlich $a_n > 0$.

Außerdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{n-1} = 0$$

und es ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+3}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n-1)}{n+2} = \frac{n^2+2n-3}{n^2+3n+2} < 1$$

d,h,, dass die Folge der a_n streng monoton fällt.
(Alternative zum letzten Schritt:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2) - (n-1)(n+3)}{n(n+1)(n-1)} = \frac{n+5}{n(n+1)(n-1)} > 0)$$

Die Folge der a_n ist also positiv, und streng monoton fallend gegen Null. Damit sind die Vorraussetzungen zur Anwendung des Leibniz Kriteriums erfüllt. Die Reihe ist konvergent.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Zunächst stellt man fest, dass $\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$ gilt. Mit $a_n := \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ überprüft man dann die Vorraussetzungen zur Anwendung des Leibniz Kriteriums.

Es gilt $\dfrac{1}{n} \in (0,1], \ \forall n \geq 1$. Für Argumente zwischen 0 und 1 nimmt die Sinus–Funktion nur positive Werte an. Es gilt also $a_n > 0$.

Außerdem ist die Sinus–Funktion hier streng monoton steigend. Also

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Longrightarrow \sin(\frac{1}{n+1}) < \sin(\frac{1}{n}) \Longrightarrow a_{n+1} < a_n.$$

Die Folge der a_n fällt also streng monoton.

Weiterhin gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \sin(0) = 0$$

Die Folge der a_n ist also positiv, und streng monoton fallend gegen Null. Damit sind die Vorraussetzungen zur Anwendung des Leibniz Kriteriums erfüllt. Die Reihe ist konvergent.

b) (i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \pi \cdot \frac{\cos(\pi x)}{\frac{1}{x}} = -\pi$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2 + x^2 - 2\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + 2\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + 2\cos(x)}{2} = 2$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{e^{2x}}$.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die k-te Ableitung von f für alle $k \in \mathbb{N}_0$ durch die Formel

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k \, 2^{k-1} \, (2x-k)}{e^{2x}} \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

gegeben ist.

b) Geben Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

c) Schätzen Sie den absoluten Fehler $|f(x) - T_3(x;0)|$ im Intervall $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ nach oben ab.

Lösung zur Aufgabe 2:

$f(x) = \dfrac{x}{e^{2x}}$.

a) Behauptung : für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt die Formel

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k \, 2^{k-1} \, (2x-k)}{e^{2x}} \qquad k \in \mathbb{N}_0 .$$

Beweis mittels vollständiger Induktion: *Induktionsanfang:* $k = 0$

$$\frac{(-1)^0 \, 2^{-1} \cdot 2x}{e^{2x}} = \frac{x}{e^{2x}} = f(x) .$$

Induktionsschritt: Annahme: Die Behauptung gilt für ein festes $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' &= \left(\frac{(-1)^k \, 2^{k-1} \, (2x-k)}{e^{2x}}\right)' \\ &= (-1)^k \, \frac{2^k e^{2x} - 2e^{2x} 2^{k-1} \, (2x-k)}{(e^{2x})^2} \\ &= (-1)^k \, \frac{2^k - 2^k (2x-k)}{e^{2x}} = (-1)^{k+1} \, \frac{2^k (2x-k-1)}{e^{2x}} \\ &= (-1)^{k+1} \, \frac{2^k (2x-(k+1))}{e^{2x}} \end{aligned}$$

was zu zeigen war. Damit gilt die angegebene Formel für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Nach Teil a) gilt

$$f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k \, 2^{k-1}(-k)}{e^0} = (-1)^{k+1} k 2^{k-1}.$$

Also

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(0) = -4 \qquad f'''(0) = 12$$

Damit erhalten wir

$$T_3(x;0) = x - 2x^2 + 2x^3 \cdot$$

c) Für den Fehler gilt $|f(x) - T_3(x;0)| \le \frac{|f^{(4)}(\zeta)|}{4!} \, x^4$, mit einem $\zeta \in [-0.25, 0.25]$.

Nach Voraussetzung ist $|x| \le \frac{1}{4}$. Die Formel für die vierte Ableitung entnehmen wir dem Teil a). So erhalten wir

$$\begin{aligned}
|f(x) - T_3(x;0)| &\le \frac{|2^3(2\zeta - 4)|}{e^{2\zeta}} \cdot \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \\
&\le \frac{|\zeta - 2|}{e^{-0.5}} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{16} \\
&\le \frac{(2.25)\sqrt{e}}{24 \cdot 16} \\
&< \frac{9 \cdot 2}{4 \cdot 24 \cdot 16} \;=\; \frac{3}{256} \;<\; \frac{12}{1000} \;=\; 0.012.
\end{aligned}$$