Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2004/05**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz

a) $\boldsymbol{x}^{\,n} = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \ \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right)^T, \quad n \in \mathbb{N},$

b) $\boldsymbol{x}^n = \left(\frac{2^n n^2}{3^n}, \frac{n^2}{n^2+1}, \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)} \right)^T, \quad n \in \mathbb{N},$

c) $\boldsymbol{x}^0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_n \sin y_n \\ x_n \cos y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Hinweis: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 14:

Man schreibe die folgenden Reihen in Summenschreibweise und untersuche sie auf Konvergenz:

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11} + \cdots,$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{9}\right)^3 + \left(\frac{4}{11}\right)^4 + \cdots,$

c) $\frac{10}{1!} + \frac{10^2}{3!} + \frac{10^3}{5!} + \frac{10^4}{7!} + \cdots$

d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \cdots,$

e) $1 + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \frac{5}{17} + \frac{6}{26} + \cdots.$

Aufgabe 15:

a) Man zeige, dass die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$
alterniert und dass für $a_n := \dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

b) Warum konvergiert die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{n}{n+2}\right)\,?$$
Ab welchem Index N unterscheiden sich die Partialsummen s_N vom Grenzwert der Reihe um weniger als 10^{-2}?

Aufgabe 16:

a) Man ermittle für folgende Mengen D_i jeweils die Menge D_i' aller Häufungspunkte und die Menge D_i^0 aller inneren Punkte. Welche der Mengen sind abgeschlossen bzw. offen?
$$D_1 = \{\tfrac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\}\cup[1,2],\quad D_2 = \{\tfrac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\}\cup[-1,0]\,,$$
$$D_3 =]1,\infty[,\qquad D_4 =]-\infty,0[\times[0,1]\,.$$

b) Man bestimme die Grenzwerte bzw. Häufungspunkte im Bildbereich folgender Funktionen:

$f_1(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1},$	$D_1 =]0,\infty[\setminus\{1\}$	für	$x\to 0,$
$f_2(x) = \sqrt{(-x^2)},$	$D_2 = \{0\},$	für	$x\to 0,$
$f_3(\xi,\eta) = \dfrac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2+\eta^2},$	$D_3 = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},$	für	$(\xi,\eta)\to(0,0),$
$\boldsymbol{f}_4(x) = \left(\dfrac{1}{x}+\cos x,\ \dfrac{1}{x}+\sin x\right),$	$D_4 =]0,\infty[,$	für	$x\to\infty.$

Abgabetermin: 3.1. - 7.1.2005 (zu Beginn der Übung)