

Aufgabe 1:

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \exp\left(-x - \frac{4}{x+3}\right)$$

definierte reellwertige Funktion. Dabei bezeichnet \exp die e -Funktion, d.h. $\exp(x) = e^x$.

- a) Man gebe den maximalen Definitionsbereich D von f an.
- b) Wie viele Nullstellen besitzt f .
- c) Man berechne $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$.
- d) Man untersuche das Verhalten von f im Unendlichen.
- e) Man untersuche das Monotonieverhalten von f im Definitionsbereich D .
- f) Man bestimme alle lokalen Extrema von f .
- g) Wie lautet das Taylor-Polynom $T_1(x; x_0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Aufgabe 2:

- a) Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz

(i) $\frac{4}{6} + \frac{8}{11} + \frac{12}{16} + \frac{16}{21} + \frac{20}{26} + \dots$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 5^n}{6^n}$.

- b) Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = \sqrt{n^6 + 3n^3} - \sqrt{n^6 - 2n^3}$, falls er existiert.
- c) Man beweise z.B. durch vollständige Induktion

$$\sum_{j=3}^n \frac{2}{j^2 - 2j} = \frac{3}{2} - \frac{2n-1}{n(n-1)}.$$