Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass das uneigentliche Integral

$$\int_3^\infty \frac{x^\alpha}{\sqrt{x^4+x^2+3}}\,dx$$

für $\alpha = 0$ konvergiert und für $\alpha = 1$ divergiert.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^e x^2(\ln(x))^2\,dx\,\cdot$$

Lösung :

a) Für den Fall $\alpha = 0$ erhalten wir folgende Abschätzung

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+3}} \le \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}.$$

Also folgt

$$0 \le \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+3}}\,\mathrm{d}x \le \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_3^b = \frac{1}{3}$$

Alternative zur Berechnung des Wertes : Das Integral $\int_3^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x$ konvergiert, (vgl. Folie 229 Vorlesung bzw. Folie 15 zur Anleitung Nr. 5). Somit folgt aus dem Majorantenkriterium, dass das zu untersuchende Integral konvergiert.

Für den Fall $\alpha = 1$ erhält man für $x \ge 3$ folgende Abschätzung

$$\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+3}} \ge \frac{x}{\sqrt{x^4+x^4+x^4}} = \frac{x}{\sqrt{3}\sqrt{x^4}} = \frac{1}{\sqrt{3}x} \ge 0.$$

Das Integral $\int_3^\infty x^{-1}\,\mathrm{d}x$ divergiert (vgl. Folie 229 Vorlesung bzw. Folie 15 zur Anleitung Nr. 5). Hier folgt aus dem Minorantenkriterium, dass das zu untersuchende Integral divergiert.

Altenative zum Zitieren der Vorlesung/Anleitungen:

$$\lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+3}}\mathrm{d}x \ge \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{1}{\sqrt{3}x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\ln(x)}{\sqrt{3}}\right]_3^b = \infty$$

b) Durch zweimalige Anwendung der partiellen Integration erhält man

$$
\begin{aligned}
\int_1^e x^2 \big(\ln(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3\big(\ln(x)\big)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{3}x^3 \ln(x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}e^3 - \int_1^e \frac{2}{3}x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}e^3 - \left[\frac{2}{9}x^3 \ln(x)\right]_1^e + \int_1^e \frac{2}{9}x^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{9}e^3 + \left[\frac{2}{27}x^3\right]_1^e \\
&= \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{9}e^3 + \frac{2}{27}e^3 - \frac{2}{27} \\
&= \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}.
\end{aligned}
$$

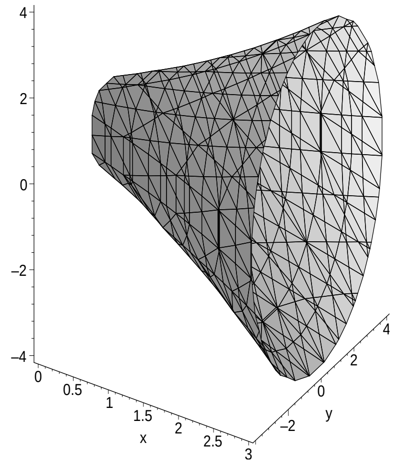

Abbildung 1: Rotation von $f(x) = 1/9(x+3)^2$ um die x-Achse

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die Funktion $z := \frac{1}{9}(x+3)^2$ mit $0 \le x \le 3$. Skizzieren Sie den durch Rotation des Funktionsgraphen um die x–Achse entstehenden Rotationskörper und berechnen Sie dessen Volumen.

b) Von einer Funktion $y = f(x)$ seien die folgenden Daten gegeben:

x_k	-2	-1	0	2
y_k	1	2	3	1

Geben Sie das zugehörige Interpolationspolynom p_3 dritten Grades in der Newtonschen Darstellung an (dividierte Differenzen!), berechnen Sie $p_3(1)$ und schätzen Sie den Interpolationsfehler $|p_3(1) - f(1)|$ nach oben ab, wobei vorausgesetzt werde, dass $\left|f^{(4)}(x)\right| \le 2$ für alle $x \in [-2, 2]$ gilt.

Lösung:

a) Das Volumen des durch Rotation um die x-Achse entstehenden Körpers ist

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{9}(x+3)^2\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^3 \frac{1}{81}(x+3)^4 \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{405}\left[(x+3)^5\right]_0^3 = \frac{\pi\cdot(6^5-3^5)}{405} = \frac{2^5\cdot 3^5 - 3^5}{5\cdot 3^4}\pi = \frac{93}{5}\pi. \end{aligned}$$

b) Durch Anwendung des Rechenschemas zur Berechnung der dividierten Differenzen erhält man

x_k	$[y_k]$	$[y_k, y_{k+1}]$	$[y_k, \ldots, y_{k+2}]$	$[y_k, \ldots, y_{k+3}]$
-2	$\mathbf{1}$			
-1	2	$\mathbf{1}$		
0	3	1	$\mathbf{0}$	
2	1	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\mathbf{\frac{1}{6}}$

Somit ist das Newton'sche Interpolationspolynom gegeben durch

$$p_3(x) = 1 + (x+2) - \frac{1}{6}(x+2)(x+1)x,$$

und es ist $p_3(1) = 1 + 3 - 1 = 3$. Die Fehlerabschätzung bekommt man aus Satz 12.1.13 im Buch von Ansorge und Oberle. Es gilt mit $\tau \in (-2, 2)$

$$\big|f(1) - p_3(1)\big| = \frac{|f^{(4)}(\tau)|}{4!}\big|(1+2)(1+1)(1+0)(1-2)\big| \leq \frac{2}{4!} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$