Analysis II für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Sommersemester 2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (SS 2002)

6.3 Elementare Funktionen

Die Exponentialfunktion

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir:

$$\boxed{\exp(z) := \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{k!} z^k}$$

Konvergenzradius $r = \infty \Rightarrow \exp(x)$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ erklärt und stetig.
Für reelle Argumente ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x), \qquad \exp(0) = 1.$$

Gewöhnliche Differentialgleichung: suche eine Funktion $y(x)$ mit

$$y'(x) = a \cdot y(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

(Eindeutige) Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = y_0 \cdot \exp(a \cdot (x - x_0)).$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion:

1) Funktionalgleichung

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(z) \neq 0, \qquad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(x) > 0.$$

4) Asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$$

5) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0.$$

6) Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend mit Wertebereich $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

7) Es gilt:

$$e \;:=\; \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e \;=\; 2.7182\,81828\,45904\,52353\,60287\,\ldots$$

Weiter ist e eine **irrationale Zahl**, sogar eine **transzendente** Zahl.

8) Für alle $q \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(qx) = (\exp(x))^q.$$

Der natürliche Logarithmus

Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, existiert die **Umkehrfunktion**:

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Diese Funktion nennt man den **natürlichen Logarithmus**.

Eigenschaften:

1) Die Funktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.
2) Es gilt: $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$.
3) Funktionalgleichung:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \forall\, x, y > 0.$$

4) Potenz:

$$\ln(x^q) = q \cdot \ln x \qquad \forall\, x > 0,\ q \in \mathbb{Q}.$$

5) Spezielle Funktionswerte:

$$\ln(1) = 0, \qquad \ln(e) = 1.$$

6) Der natürliche Logarithmus ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

7) Es gilt die Potenzreihenentwicklung:

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad (-1 < x < 1).$$

Die allgemeine Potenz

Für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ hatten wir:

$$a^q = \exp(q \cdot \ln a).$$

Wir definieren daher **allgemeine Potenzen**:

$$a^z := \exp(z \cdot \ln a) \qquad (a > 0,\, z \in \mathbb{C}).$$

Eigenschaften der allgemeinen Potenz:

1) Die Funktion $f(x) = a^x$ ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.
2) Es gilt:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

sowie

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

3) Für $a \neq 1$ besitzt $y = a^x$ eine Umkehrfunktion

$$y(x) = \log_a x$$

den **Logarithmus zur Basis** a. Es gilt:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (x > 0).$$

4) Es gelten die folgenden Differentiationsregeln:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^x) &= \ln a \cdot a^x \qquad (x \in \mathbb{R},\, a > 0) \\ \frac{d}{dx}(x^a) &= a x^{a-1} \qquad (a \in \mathbb{R},\, x > 0) \\ \frac{d}{dx}(\log_a x) &= \frac{1}{x \ln a} \qquad (x, a > 0). \end{aligned}$$

5) Verallgemeinerung des binomischen Satzes:

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} x^k \qquad (a \in \mathbb{R},\ -1 < x < 1)$$

mit

$$\begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (a-j) \qquad (k \geq 0).$$

Spezialfälle sind die beiden Entwicklungen:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \dots$$

Beweisidee: $g(x)$ löst die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(1+x)g'(x) = ag(x)$$

Die hyperbolischen Funktionen: Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\cosh z := \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) \qquad \sinh z := \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$$

Die entsprechenden Potenzreihenentwicklungen sind (siehe oben):

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \qquad \sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

Eigenschaften:

1) Die Funktion $\cosh$ ist **gerade**, d.h.

$$\cosh(-z) = \cosh(z).$$

Dagegen ist die Funktion $\sinh$ **ungerade**, d.h.

$$\sinh(-z) = -\sinh(z).$$

2) Ableitungen der hyperbolischen Funktionen. Es gilt:

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$$

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$$

3) Funktionalgleichungen:

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

4) Algebraische Relation:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Inverse hyperbolische Funktionen, Areafunktionen:

Die Funktionen $\cosh$ und $\sinh$ sind streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$:

Die Umkehrfunktionen bezeichnen wir mit **arcosh** und **arsinh**

Es gilt:

$$\text{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad (x \in \mathbb{R}$$

$$\text{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad (1 \le x < \infty)$$

sowie

$$\frac{d}{dx}\text{arsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\frac{d}{dx}\text{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (1 \le x < \infty)$$

Die trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} \sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \end{aligned}$$

Konvergenzradius $r = \infty \Rightarrow$ Funktionen sind auf ganz $\mathbb{C}$ erklärt und dort stetig.

Eigenschaften:

1) $\sin$ ist eine ungerade, $\cos$ eine gerade Funktion

$$\sin(-z) = -\sin(z), \qquad \cos(-z) = \cos(z)$$

und

$$\sin(0) = 0, \qquad \cos(0) = 1$$

2) Es gilt:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i \sin z \\ \sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = (\sin x \cosh y) + i(\cos x \sinh y) \\ \cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = (\cos x \cosh y) - i(\sin x \sinh y) \end{aligned}$$

sowie

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

3) **Funktionalgleichungen**

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v, \quad \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

4) **Reelle** Ableitungen:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

Die komplexen Tangens– und Kotangensfunktionen

$$\tan z \quad := \quad \frac{\sin z}{\cos z} \qquad (z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$\cot z \quad := \quad \frac{\cos z}{\sin z} \qquad (z \neq k\pi)$$

Eigenschaften:

1) $\tan$ und $\cot$ sind π–periodische, ungerade Funktionen.

2) Es gilt:

$$\tan z \quad = \quad -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad (z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$\cot z \quad = \quad i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \qquad (z \neq k\pi)$$

3) Reihen–Entwicklungen:

$$\begin{aligned}
\tan z &= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right) \\
\cot z &= \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \dots \\
&= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \qquad (0 < |z| < \pi)
\end{aligned}$$

mit den Bernoullischen Zahlen B_{2k}.

4) **Reelle** Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (x \neq k\pi)$$