Aufgabe 1:

a) Gesucht sei ein Fixpunkt x^* der Funktion

$$g(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

im Intervall $I = [1, 2]$.

(i) Überprüfen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf dem Intervall $I = [1, 2]$.

(ii) Führen Sie ausgehend von $x_0 = 1$ einen Schritt des Fixpunktverfahrens $x_{n+1} = g(x_n)$ durch und zeigen Sie, dass der absolute Fehler nach einer Iteration durch 0.5 beschränkt ist. Das heißt:

$$|x_1 - x^*| \le 0.5$$

(iii) Geben Sie eine obere Schranke für den relativen Fehler $\left|\frac{x_1 - x^*}{x^*}\right|$ an.

b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4 - x^2}}\, dx$$

divergiert.

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die Funktion $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \dfrac{5x + 4}{(x^2 + 4)(x - 5)}$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)dx$.

b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$g(x) := \frac{x}{(x^2 + 4)}$$

mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und geben Sie den Konvergenzradius der Reihe an. Wie lautet das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(x; 0)$ von g mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$?

Hinweis: Geometrische Reihe

Hinweis: Alle Integrale sind elementar zu berechnen. Stammfunktionen aus Formelsammlungen etc. dürfen nicht verwendet werden.

Viel Erfolg!