6.3 Elementare Funktionen

Die Exponentialfunktion
Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir:

$$\boxed{\exp(z) := \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{k!} z^k}$$

Konvergenzradius $r = \infty \Rightarrow \exp(z)$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ erklärt und stetig.

Für reelle Argumente ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x), \qquad \exp(0) = 1$$

Gewöhnliche Differentialgleichung: suche eine Funktion $y(x)$ mit

$$y'(x) = a \cdot y(x), \quad y(x_0) = y_0$$

(Eindeutige) Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = y_0 \cdot \exp(a \cdot (x - x_0))$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion:

1) Funktionalgleichung

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{C}$$

2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(z) \neq 0, \qquad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$$

3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(x) > 0$$

4) Asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$$

5) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$$

6) Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend mit Wertebereich $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

7) Es gilt:

$$\begin{aligned} e &:= \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ e &= 2.7182\,81828\,45904\,52353\,60287\ \ldots \end{aligned}$$

Weiter ist e eine **irrationale Zahl**, sogar eine **transzendente** Zahl.

8) Für alle $q \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(qx) = (\exp(x))^q$$

Der natürliche Logarithmus

Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, existiert die **Umkehrfunktion**:

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

Diese Funktion nennt man den **natürlichen Logarithmus**.

Eigenschaften:

1) Die Funktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.

2) Es gilt: $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$.

3) Funktionalgleichung:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \forall\, x, y > 0$$

4) Potenz:

$$\ln(x^q) = q \cdot \ln x \qquad \forall\, x > 0,\, q \in \mathbb{Q}$$

5) Spezielle Funktionswerte:

$$\ln(1) = 0, \qquad \ln(e) = 1$$

6) Der natürliche Logarithmus ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

7) Es gilt die Potenzreihenentwicklung:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad (-1 < x < 1)$$

Die allgemeine Potenz

Für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ hatten wir:

$$a^q = \exp(q \cdot \ln a)$$

Wir definieren daher **allgemeine Potenzen**:

$$a^z := \exp(z \cdot \ln a) \qquad (a > 0,\, z \in \mathbb{C})$$

Eigenschaften der allgemeinen Potenz:

1) Die Funktion $f(x) = a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

2) Es gilt:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

sowie

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

3) Für $a \neq 1$ besitzt $y = a^x$ eine Umkehrfunktion

$$y(x) = \log_a x$$

den **Logarithmus zur Basis** a. Es gilt:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (x > 0)$$

4) Es gelten die folgenden Differentiationsregeln:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(a^x) &= \ln a \cdot a^x \qquad (x \in \mathbb{R},\ a > 0) \\
\frac{d}{dx}(x^a) &= a x^{a-1} \qquad (a \in \mathbb{R},\ x > 0) \\
\frac{d}{dx}(\log_a x) &= \frac{1}{x \ln a} \qquad (x, a > 0)
\end{aligned}$$

5) Verallgemeinerung des binomischen Satzes:

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \qquad (a \in \mathbb{R},\ -1 < x < 1)$$

mit

$$\binom{a}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (a - j) \qquad (k \geq 0)$$

Spezialfälle sind die beiden Entwicklungen:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \ldots \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \ldots
\end{aligned}$$

Beweisidee: Rechte Seite löst die Differentialgleichung

$$(1+x)g'(x) = a g(x)$$

Die hyperbolischen Funktionen: Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\cosh\ z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \qquad \sinh\ z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

Die entsprechenden Potenzreihenentwicklungen sind (siehe oben):

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \qquad \sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

Eigenschaften:

1) Die Funktion cosh ist **gerade**, d.h.

$$\cosh(-z) = \cosh(z)$$

Dagegen ist die Funktion sinh **ungerade**, d.h.

$$\sinh(-z) = -\sinh(z)$$

2) Ableitungen der hyperbolischen Funktionen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cosh(x) &= \sinh(x) \\ \frac{d}{dx} \sinh(x) &= \cosh(x) \end{aligned}$$

3) Funktionalgleichungen:

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

4) Algebraische Relation:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Inverse hyperbolische Funktionen, Areafunktionen:

Die Funktion sinh ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, cosh auf $[0,\infty)$:

Die Umkehrfunktionen bezeichnen wir mit **arcosh** und **arsinh**

Es gilt:

$$\begin{aligned}\text{arsinh}(x) &= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \qquad (x\in\mathbb{R})\\ \text{arcosh}(x) &= \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \qquad (1\le x<\infty)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\text{arsinh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (x\in\mathbb{R})\\ \frac{d}{dx}\text{arcosh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (1\le x<\infty)\end{aligned}$$

Die trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned}\sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}\\ \cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}\end{aligned}$$

Konvergenzradius $r=\infty \Rightarrow$ Funktionen sind auf ganz $\mathbb{C}$ erklärt und dort stetig.

Eigenschaften:

1) sin ist eine ungerade, cos eine gerade Funktion

$$\sin(-z) = -\sin(z), \qquad \cos(-z)=\cos(z)$$

und

$$\sin(0)=0, \qquad \cos(0)=1$$

2) Es gilt:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i\sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i\sin z \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = (\sin x \cosh y) + i(\cos x \sinh y) \\ \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = (\cos x \cosh y) - i(\sin x \sinh y) \end{aligned}$$

sowie

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

3) **Funktionalgleichungen**

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v, \quad \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

4) **Reelle** Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

Die komplexen Tangens– und Kotangensfunktionen

$$\begin{aligned} \tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z} \qquad (z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ \cot z &:= \frac{\cos z}{\sin z} \qquad (z \neq k\pi) \end{aligned}$$

Eigenschaften:

1) $\tan$ und $\cot$ sind π–periodische, ungerade Funktionen.

2) Es gilt:

$$\begin{aligned} \tan z &= -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad (z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ \cot z &= i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \qquad (z \neq k\pi) \end{aligned}$$

3) Reihen–Entwicklungen:

$$\begin{aligned}\tan z &= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot z &= \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \dots \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \qquad (0 < |z| < \pi)\end{aligned}$$

mit den Bernoullischen Zahlen B_{2k}.

4) **Reelle** Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ \frac{d}{dx}\cot x &= -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (x \neq k\pi)\end{aligned}$$