8.4 Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Integration erfolgt über die

Partialbruch–Zerlegung

einer rationalen Funktion.
Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1} x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j} x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

8.4 Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Integration erfolgt über die

Partialbruch–Zerlegung

einer rationalen Funktion.
Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1} x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j} x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

Erläuterungen:

1) Wir haben angenommen, dass $p(x)$ und $q(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen.

2) Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls
$$\deg p \geq \deg q$$
In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mittels **Polynomdivision**.

3) Bei der verbleibenden rationalen Funktion
$$\frac{p_2(x)}{q_2(x)} = R(x) - p_1(x)$$
besitzt der Nenner $q_2(x)$
   - die **reellen** Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j
   - die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j
   - und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$

Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

Parameter, die berechnet werden müssen

$$\begin{aligned} &\alpha_{jl}, \quad j = 1, \ldots, n_1,\ l = 1, \ldots, k_j \\ &\gamma_{jl}, \quad j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ l = 1, \ldots, k_j \\ &\delta_{jl}, \quad j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ l = 1, \ldots, k_j \end{aligned}$$

Dies erfolgt über **Koeffizientenvergleich**,
d.h. die rechte Seite wird auf den Hauptnenner gebracht.

Beispiel: Wir betrachten die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2+1} \\ \Rightarrow \quad 1 - x &= x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1) \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren:

$$1 - x = (\alpha_1 + \gamma_1)x^3 + (\alpha_2 + \delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_1 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 + \delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$$

Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

Bei der Integration rationaler Funktionen gibt es **4 Grundtypen**:

1) **Polynome:**

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

2) **Inverse Potenzen:**

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^l} = \begin{cases} \ln|x - x_0| + C & : \ l = 1 \\ \dfrac{1}{1-l} \cdot \dfrac{1}{(x-x_0)^{l-1}} + C & : \ l = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

3) **Inverse Quadrate:**

$$\begin{aligned} I_l &:= \int \frac{1}{(t^2+1)^l} \, dt \qquad (l \in \mathbb{N}) \\ I_l &= \frac{1}{2(1-l)} \left[(3-2l) I_{l-1} - \frac{t}{(t^2+1)^{l-1}} \right], \qquad l = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Zunächst gilt:

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + C$$

Herleitung einer Rekursionsformel für $l > 1$:
Mittels Substitution:

$$\begin{aligned}\int \frac{2t}{(t^2+1)^l}\,dt &= \int \frac{du}{u^l} = \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{u^{l-1}} + C \\ &= \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{(t^2+1)^{l-1}} + C\end{aligned}$$

Mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}I_{l-1} &= \int \frac{1}{(t^2+1)^{l-1}}\,dt = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^l}\,dt = \int \frac{t}{2} \cdot \frac{2t}{(t^2+1)^l}\,dt + I_l \\ &= \frac{1}{2(1-l)(t^2+1)^{l-1}} - \frac{1}{2(1-l)} \cdot I_{l-1} + I_l\end{aligned}$$

4) **Wie Typ 3), aber Zähler linear:**

$$\begin{aligned}\int \frac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx &= \frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx \\ &\quad +(d+c\cdot a)\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^l}\end{aligned}$$

Erstes Integral:

$$\begin{aligned}\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx &= \int \frac{du}{u^l} \\ &= \begin{cases} \ln|(x-a)^2+b^2| + C & : \; l = 1 \\ \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{[(x-a)^2+b^2)^l]} + C & : \; l = 2,3,\ldots \end{cases}\end{aligned}$$

Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^l} = \frac{1}{b^{2l-1}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^l} \qquad \text{mit} \quad t = \frac{x-a}{b}$$

Beispiel: Wir betrachten wiederum die rationale Funktion

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1} \\ \Rightarrow \quad \int R(x)\,dx &= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + C \end{aligned}$$

Bemerkung: Substitution bei anderen Integralen:

1)

$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$$

2)

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$