Definition:

1) Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine C^1–Kurve. Die Funktion

$$S(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| \, d\tau$$

heißt die **Bogenlängenfunktion** von c.

2) Ist c eine glatte C^1–Kurve, so ist $S : [a, b] \to [0, L(c)]$ ein C^1–Parameterwechsel.
Die Umkehrabbildung $t = S^{-1}(s)$, $0 \leq s \leq L(c)$, ist dann ebenfalls ein C^1–Parameterwechsel.
Die entsprechende Parametrisierung

$$\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s)), \quad 0 \leq s \leq L(c)$$

von c nennt man die **Parametrisierung nach der Bogenlänge**.

Bemerkung:

1) Die Ableitung von $\tilde{c}(s)$ ist gegeben durch

$$\tilde{c}\,'(s) = \dot{c}(S^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\| \cdot c(S^{-1}(s))\|}$$

Daher ist $\tilde{c}\,'(s)$ ist ein **Einheitsvektor**, i.e. die Parametrisierung ist derart, dass die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen wird.
Gleichzeitig ist $\tilde{c}\,'(s)$ der **Einheitstangentenvektor**.

2) Aus $\langle(\tilde{c}\,'(s), \tilde{c}\,'(s)\rangle = 1$ folgt durch Differentiation

$$\langle\tilde{c}\,''(s), \tilde{c}\,'(s)\rangle = 0$$

i.e. der **Beschleunigungsvektor** $\tilde{c}\,''(s)$ bezüglich der Bogenlänge steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor.

Bemerkung:

3) Man bezeichnet den Vektor

$$n(s) := \frac{\tilde{c}''(s)}{\|\tilde{c}''(s)\|}$$

als den **Hauptnormalenvektor** der Kurve c.

4) Die Funktion $\kappa(s)$ definiert durch

$$\kappa(s) := \|\tilde{c}''(s)\|, \quad 0 \le s \le L(c)$$

nennt man die **Krümmung** der Kurve c.

Beispiel: Parametrisierung des Kreises nach der Bogenlänge:

$$\begin{aligned} \tilde{c}(s) &= (\cos s, \sin s), \quad 0 \le s \le 2\pi \\ n(s) &= \tilde{c}''(s) = -(\cos s, \sin s) \\ \kappa(s) &= 1 \end{aligned}$$

Beispiele:

1) Funktionsgraph $y = y(x)$ im $\mathbb{R}^2$: $c(x) = (x, y(x))^T$

$$\begin{aligned} c'(x) &= (1, y'(x))^T \\ ds &= \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx \quad \text{(Bogenlängenelement)} \\ L(c) &= \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx \\ \kappa(x) &= \frac{|y''(x)|}{\left(\sqrt{1 + (y'(x))^2}\right)^3} \end{aligned}$$

2) **Polarkoordinaten** im $\mathbb{R}^2$: $r = r(t), \phi = \phi(t)$

$$c(t) = (r\cos\phi, r\sin\phi)^T, \quad L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}\, dt$$

Beispiele:

3) **Herzlinie oder Kardiode** in Polarkoordinaten

$$r = a(1+\cos\phi), \quad a > 0,\ 0 \le \phi \le 2\pi$$

Für den Umfang = Bogenlänge gilt:

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\phi + a^2(1+\cos\phi)^2}\, d\phi = 2a \int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\phi}{2}\right| \, d\phi = 8a$$

Satz: Für die von einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ überstrichene Fläche gilt:

$$F(c) = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\ dt$$

Beweisidee: Berechne Fläche der Teildreiecke

$$|F_i| = \frac{1}{2}\|c(t_i) \times c(t_{i+1})\| = \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

Summation über Teildreiecke:

$$\begin{aligned} F(Z) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{t_{i+1} - t_i}\,\Delta t_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} \left(x_i \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} y_i \right)\,\Delta t_i \end{aligned}$$

Zugehörige **Riemannsche Summe**:

$$R(Z) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} (x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i)\,\Delta t_i$$

Im Grenzwert $\|Z\| \to 0$ gilt wiederum $|F(Z) - R(Z)| \to 0$ und man erhält die angegebene Formel.

Beispiel: Die **Archimedische Spirale** in Polarkoordinaten:

$$x = a\,\phi\,\cos\phi, \quad y = a\,\phi\,\sin\phi, \quad a > 0,\ \phi \in \mathbb{R}$$

Berechnung des Umfangs und der Fläche der innersten Schleife:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 + a^2\phi^2}\,d\phi \\ &= \frac{a}{2}\left[\phi\sqrt{1+\phi^2} + \ln\left(\phi + \sqrt{1+\phi^2}\right)\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &\approx 4.158a \end{aligned}$$

und

$$F = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\,d\phi = \frac{a^2}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi^2\,d\phi \approx 1.292a^2$$

9.3 Kurvenintegrale

Definition: Gegeben sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $c : [a,b] \to D$ eine stückweise C^1–Kurve.

Dann wird des **Kurvenintegral (Linienintegral) 1. Art von $f(x)$ längs c** definiert durch

$$\int\limits_c f(x)\,ds := \int\limits_a^b f(c(t))\,\|\dot{c}(t)\|\,dt$$

Für eine **geschlossene** Kurve schreibt man auch

$$\oint_c f(s)\,ds$$

Satz: Das Kurvenintegral 1. Art ist unabhängig von der Parametrisierung der betrachteten Kurve.

Beispiel:

1) Krummliniger mit Masse belegter Draht:

$$\int_c \rho(x)\, ds := \int_a^b \rho(c(t))\, \|\dot{c}(t)\|\, dt$$

Gesamtmasse des Drahtes bei inhomogener Belegung $\rho(x)$.

2) Der **Schwerpunkt** des Drahtes liegt bei

$$x_S = \frac{\int_c \rho(x) x\, ds}{\int_c \rho(x)\, ds}$$

3) Das **Trägheitsmoment** des Drahtes ist gegeben durch

$$\theta = \int_c \rho(x) r^2(x)\, ds$$

wobei $r(x)$ der Abstand von der Drehachse ist.